

مفهوم درم اراضی ها و عمق اراضی

تاریخچه زوجیت و n تایی زوجیت

منطقه از زوجیت هر دو تایی که ترتیب آن مهم باشد

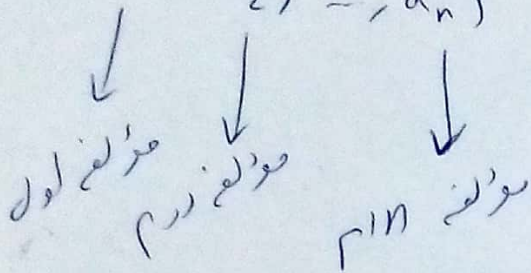
تاریخچه گوارتوفسکی سال ۱۹۲۱

$$(a, b) = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$$

که در آن a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم زوجیت نامیم، بطور مستقیم

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

یک n تایی است که ترتیب آن مهم باشد



تعریف استاندارد زوجیت

$$(a, b) = (c, d) \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

زوجیت برابرند عموماً مؤلفه ها تغییر نمی یابند یعنی $a=c$ و $b=d$ مؤلفه ها اول با هم و مؤلفه ها دوم با هم برابر باشند

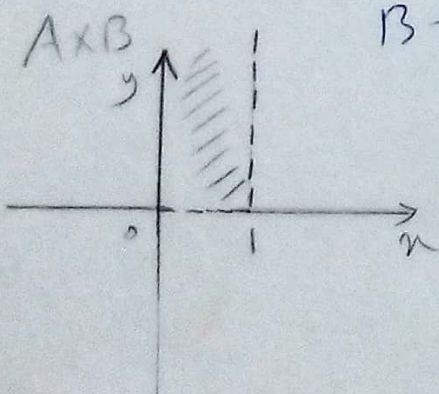
تعریف حاصل ضرب دکارتی در مجموعه

اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند، تعریف می کنیم

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

یعنی مجموعه همه زوج ها و مرتبه که مؤلفه اول در مجموعه A و مؤلفه دوم در B باشد

مثال ۱ اگر $A = [0, 1]$ و $B = (0, +\infty)$

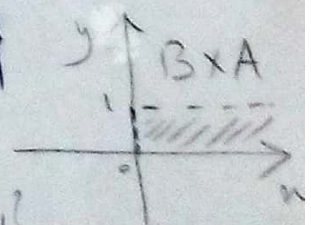


$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

$$= \{ (x, y) \mid 0 \leq x < 1, y > 0 \}$$

$$B \times A = \{ (x, y) \mid x \in B, y \in A \}$$

$$= \{ (x, y) \mid 0 < x < 1, 0 \leq y < 1 \}$$



نکته: در مثال فوق دیدیم که ضرب دکارتی مجموعه‌ها خاصیت جابجایی
ندارد و در حالت کلی $A \times B$ و $B \times A$ لزوماً یک نیستند، ولی در حالتی که A و B
هر دو صفاً از یک مجموعه A یک مجموعه m عنصر و B یک مجموعه n عنصر،
 $A \times B$ و $B \times A$ هر دو تعداد $n \times m$ زوج مرتب دارند.

همچنین است واضح است که اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ آنگاه $A \times B = B \times A = \emptyset$ و
ثابت می‌شود (تمرین)

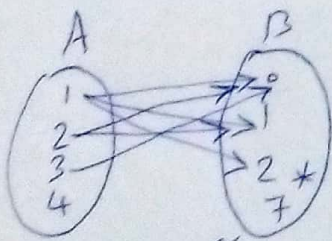
$A \times B = B \times A \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$
توضیح: اگر A یک مجموعه، ثابت باشد مجموعه زیر را قطر A می‌نامیم.

$$\Delta_A = \{(n, n) \mid n = j, n \in A\} = \{(n, n) \mid n \in A\}$$

تعریف: رابطه‌ای از A در B اگر A و B در مجموعه ثابت باشند هر زیرمجموعه $A \times B$ را یک رابطه از A در B یا از B به A می‌نامیم.

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 0, *, 7\}$

$$R = \{(n, j) \in A \times B \mid n + j < 4\}$$



$$R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$$

مثال: اگر A مجموعه دانشجویان دانشگاه و B مجموعه دانش‌آموختگان دانشگاه،
به صورت زیر باشد.

$$A \times B = \{(n, j) \mid n \text{ یک دانشجو، } j \text{ یک دانش‌آموخته}\}$$

$$R = \{(n, j) \mid n \text{ دانشجو، } j \text{ دانش‌آموخته و } n \text{ را از } j \text{ آموخته است}\}$$

در این صورت R یک رابطه از A در B یا از B به A است.

$$A \times B = A^2 = B^2 = \{(n, j) \mid n, j \in A\} = \{(n, j) \mid n, j \in B\}$$

الف: در ضرب دکارتی $A \times B$ اگر $A = B$ آنگاه می‌نویسیم
ب: اگر R رابطه‌ای از A در B یا از B به A و $A = B$ در این صورت می‌گوییم R یک
رابطه در A .

۱۴
ایک را چاروں A میں نام درج کیا گیا، وہ مقررہ مقولہ یا راہوں میں
مجموعہ سے دو بار داغیں، انہیں مجموعہ - مجموعہ بنیں۔
مثلاً: اگر مجموعہ $A = \{2, 3, 5, 10, 12\}$ ، راہ R - صورت زیر
تشریح کریں

$$R = \{(x, y) \in A^2 \mid x \mid y\}$$

و مقبره ائمه و ...
... در کربلا

[illegible]

آخر مجموع برای $A \times B$ وجود دارد پس $2^{n \times m}$ اشیاء از $A - B$ وجود دارد.

فرض کنید A و B ماتریس $n \times n$ و $m \times m$ باشند. اگر A و B هر دو معکوس باشند، آنگاه $A \otimes B$ نیز معکوس خواهد بود.

$\rightarrow$ اگر R ، اجتماع از $A - B$ باشد، مجموعه عناصر A را به ترتیب دامن در R

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \exists (x, y) \in R\} = \text{Domain}(R) \subseteq A$$

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \exists (x, y) \in R\} = \text{Range}(R) \subseteq B$$

$$\bigcup_R \subseteq A$$

$$R_R \subseteq B$$

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \exists (x, y) \in R\} = \text{Range}(R) \subseteq B$$

مثال کے لیے \$A\$ مجموعہ، \$B\$ مجموعہ، دیا گیا ہے

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \text{ such that } y = f(x)\}$$

$R = \{ (x, y) \in A \times B \mid x \text{ و } y \text{ مرتبط است} \}$
 رابطه رابط = مجموعه مرتب‌شده‌ها

برادر اعظم = محمود محمد یوسف خان کھنجر خان آسیان

هـ ۱۱. نظر کنید که $R \subseteq A \times B$ رابطه سیمتری و متب (A, R, B)

راید را می‌نامند از A به B ، مجموعه آغارها را B ، مجموعه پایم
را R ، اگر اشیاء را خود را می‌نامند اقادر این است،

فردا را به عنوان R را می‌نامیم، رابطه فرض کرده‌ایم و می‌گوییم که A در R عضو است. aRb را می‌نویسند. $(a, b) \in R$ - عبارتی

(۱۴) فرض کنیم a را به R دار، $a \rightarrow b \equiv (a, b) \in R \equiv a R b$
 $(a, b) \notin R \equiv a \not R b$ a را به R ندارد b را

حسب رابطه ها

نکته رابطه از $A - B$ بر مجموعه های از $A \times B$ است پس یک مجموعه است و
 عملیات اعمال روی مجموعه ها را می توان برای رابطه ها عملیات اعمال کرد از جمله
 اجتماع و اشتراک و تفاضل و تقابل و مکمل و عکس و وارون و ترکیب
 یک رابطه و ترکیب دو رابطه و توان یک رابطه از جمله اعمالی است که روی رابطه ها
 انجام می شود به شرح زیر:

آر و R دو رابطه از $A - B$ باشند در این صورت تعریف می کنیم

اجتماع دو رابطه $R \cup S = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R \vee (x, y) \in S \}$

اشتراک دو رابطه $R \cap S = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R, (x, y) \in S \}$

تفاضل دو رابطه $R - S = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R, (x, y) \notin S \}$

تفاضل متقابل دو رابطه $R \oplus S = R \Delta S = (R - S) \cup (S - R)$

عکس یک رابطه $\bar{R} = R^c = \{ (x, y) \in A \times B \mid (x, y) \notin R \}$

وارون یا عکس یک رابطه $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$

و اگر R رابطه ای از A به B و S رابطه ای از B به C باشد ترکیب این
 دو رابطه یعنی $S \circ R$ را تعریف می کنیم

$A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C$
 $S \circ R = \{ (x, y) \in A \times C \mid \exists z \in B \text{ such that } (x, z) \in R, (z, y) \in S \}$

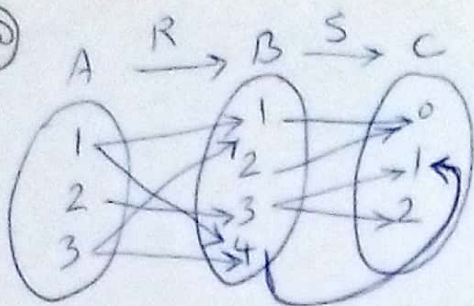
مثال ۱: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و $C = \{1, 2\}$ و

$R = \{ (1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4) \}$

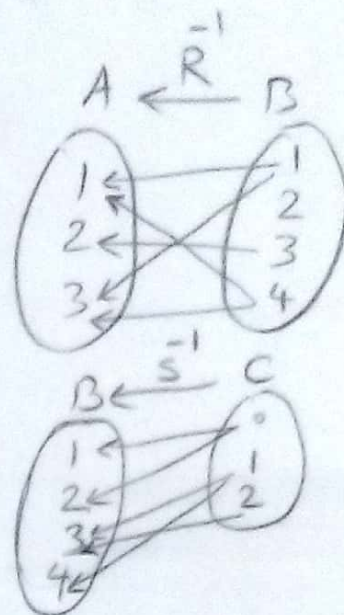
$S = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1) \}$

معمولاً است $R^c, S^c, R \circ S, S \circ R, S \circ S, R \circ R, R^{-1}, S^{-1}, (S \circ R)^{-1}$

10



10



$$\bar{R}^{-1} = \{(n, y) \mid (y, n) \in R\}$$

$$= \{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 3)\}$$

$$\bar{S}^{-1} = \{(n, y) \mid (y, n) \in S\}$$

$$= \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$$

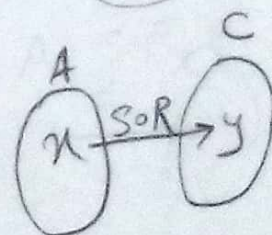
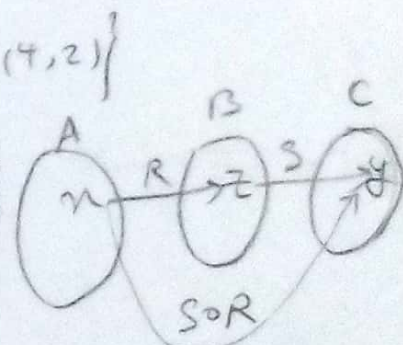
$$R^C = \{(n, y) \in A \times B \mid (n, y) \notin R\} =$$

$$\{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$S^C = \{(n, y) \in B \times C \mid (n, y) \notin S\} =$$

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (4, 0), (4, 2)\}$$

$$S \circ R = \{(n, y) \in A \times C \mid \exists z \in B \ni n R z, z S y\}$$



$$1 \xrightarrow{R} 1 \xrightarrow{S} 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \xrightarrow{S \circ R} 0$$

$$1 \xrightarrow{R} 4 \xrightarrow{S} 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \xrightarrow{S \circ R} 1$$

$$2 \xrightarrow{R} 3 \xrightarrow{S} 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \xrightarrow{S \circ R} 1$$

$$2 \xrightarrow{R} 3 \xrightarrow{S} 2 \quad \Rightarrow \quad 2 \xrightarrow{S \circ R} 2$$

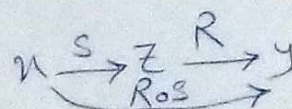
$$3 \xrightarrow{R} 1 \xrightarrow{S} 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \xrightarrow{S \circ R} 0$$

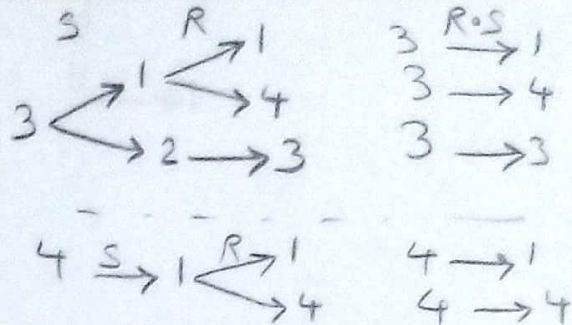
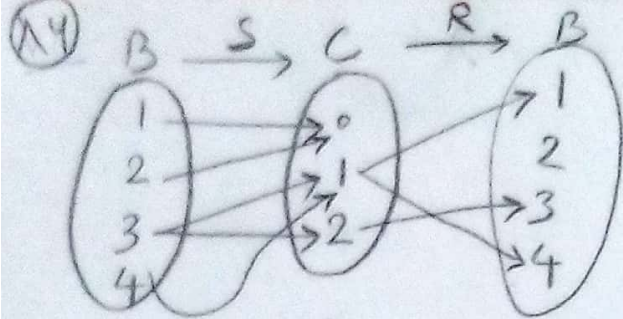
$$3 \xrightarrow{R} 4 \xrightarrow{S} 1 \quad \Rightarrow \quad 3 \xrightarrow{S \circ R} 1$$

$$\Rightarrow S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

$$\Rightarrow (S \circ R)^{-1} = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (0, 3), (1, 3)\}$$

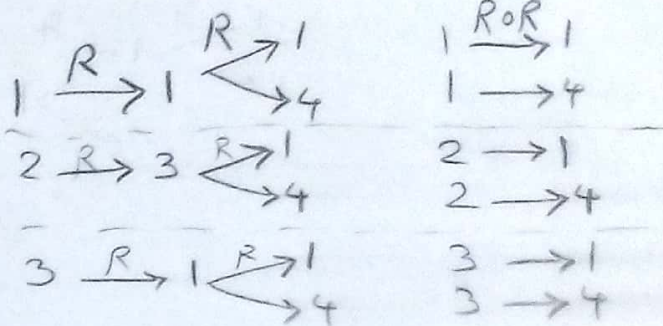
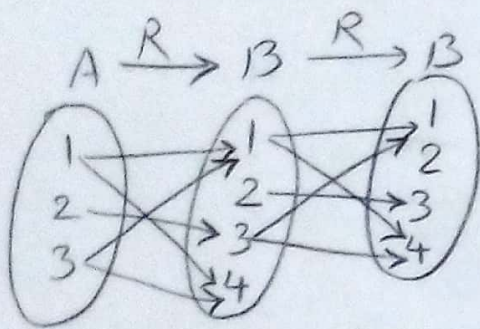
$$R \circ S = \{(n, y) \mid \exists z \ni n S z, z R y\}$$



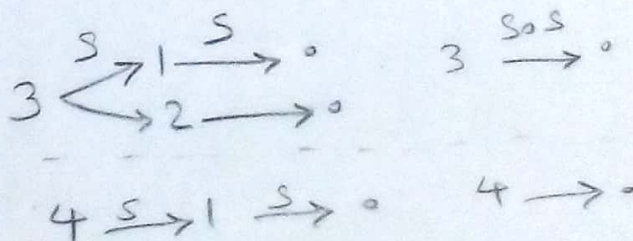
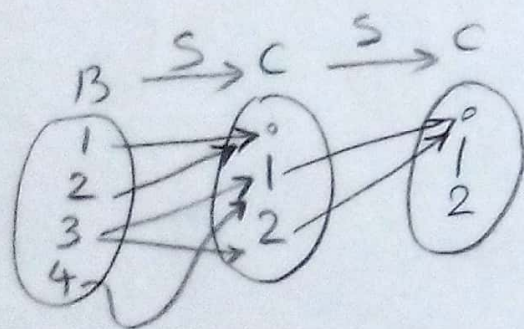


$$\Rightarrow R \circ S = \{(3, 1), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$\Rightarrow (R \circ S)^{-1} = \{(1, 3), (4, 3), (3, 3), (1, 4), (4, 4)\}$$



$$\Rightarrow R \circ R = R^2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

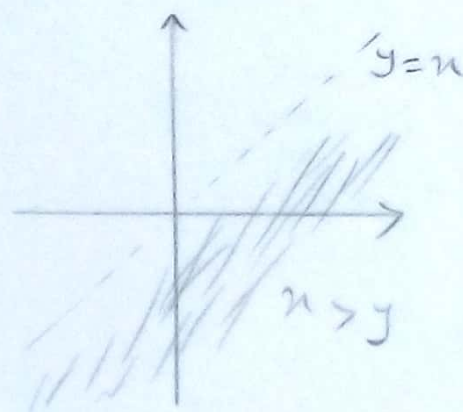
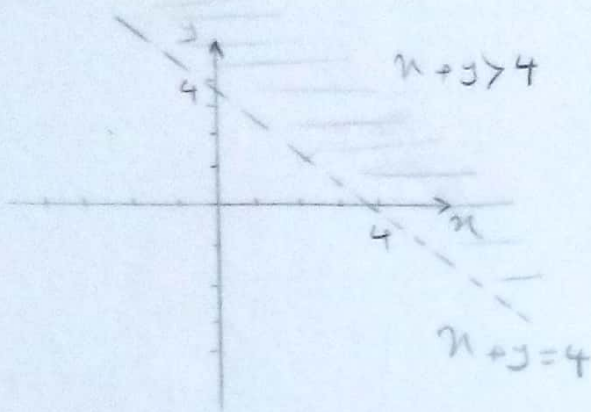


$$S \circ S = S^2 = \{(3, 1), (4, 1)\}$$

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \quad (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} \quad \text{السهم}$$

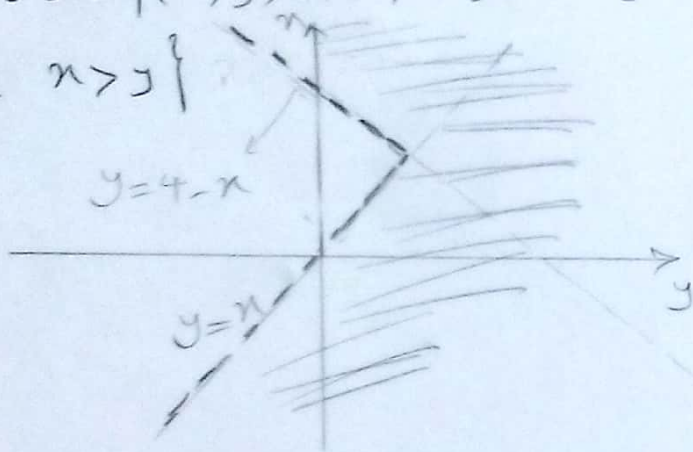
Q5

17) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 4\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ حال: روابط زیر را تعیین کرده و سپس همه زوایای مرتب آن را در صفحه مختصات

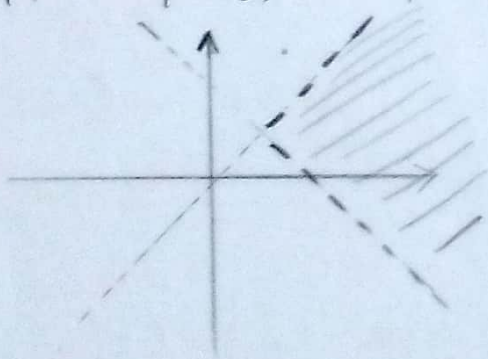


نسبتاً در معیه
 $R \cup S, R \cap S$
 $R - S, S - R$
 $R \oplus S, \bar{R}, \bar{S}$
 $R^c, S^c, R \cup S,$
 $S \cap R$

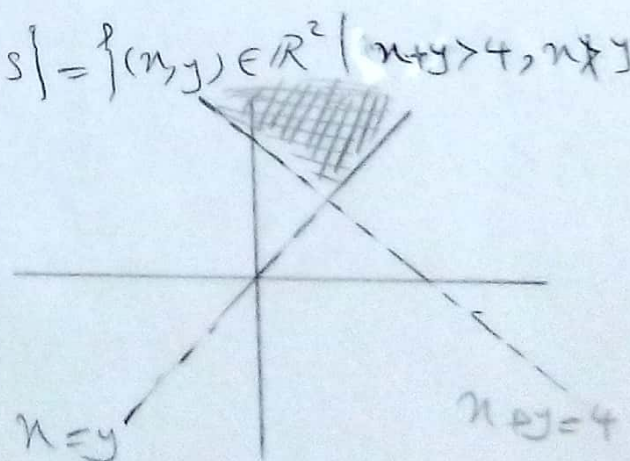
$$R \cup S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in R \cup (x, y) \in S\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 4 \cup x > y\}$$



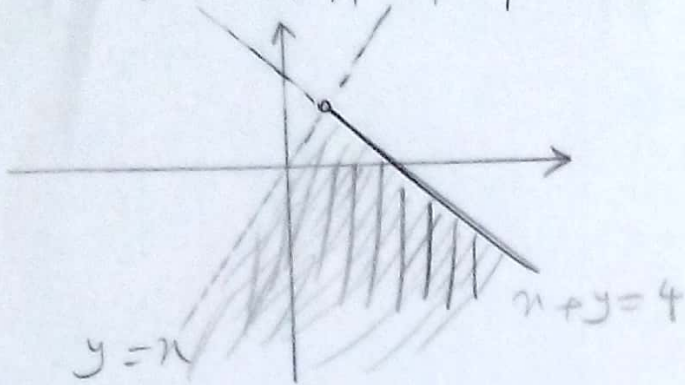
$$R \cap S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in R \cap (x, y) \in S\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 4, x > y\}$$



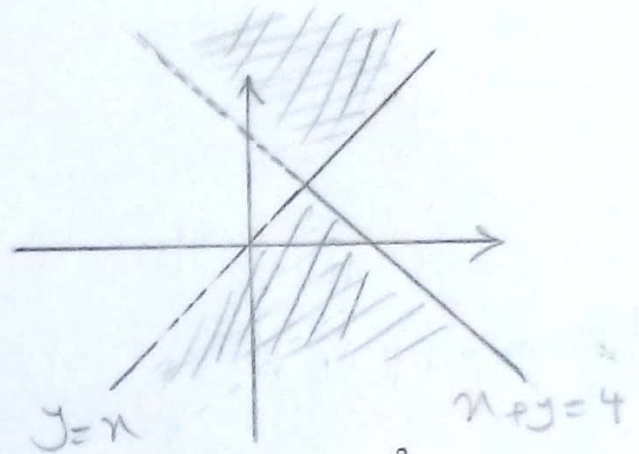
$$R - S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in R, (x, y) \notin S\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 4, x \leq y\}$$



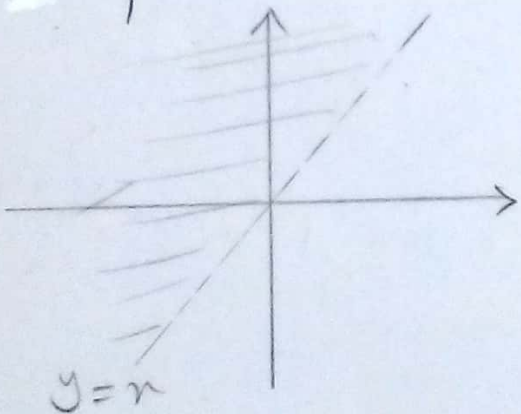
(11)
 $S - R = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (n, y) \in S, (n, y) \notin R\} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$
 $n > y, n + y \leq 4\} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n > y, n + y \leq 4\}$



$$R \oplus S = S \oplus R = (R - S) \cup (S - R)$$



$$S^{-1} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, n) \in S\} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > n\}$$

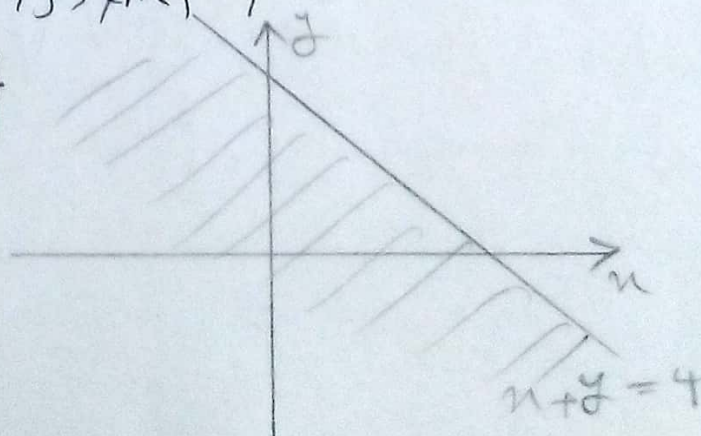


$$R^{-1} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, n) \in R\} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + n > 4\} =$$

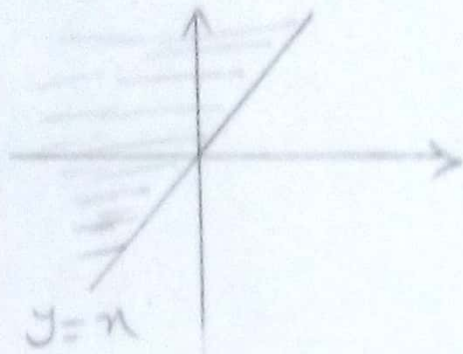
$$\{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n + y > 4\} = R$$

$$R^c = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (n, y) \notin R\} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n + y \not\leq 4\} =$$

$$\{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n + y > 4\}$$



$$S = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (n, y) \notin S\} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n > y\} = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n < y\}$$



$$R \circ S = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} \exists (n, z) \in S, (z, y) \in R\} =$$

$$\{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} \exists n > z, z + y > 4\}$$

$$\left. \begin{array}{l} n > z \\ z + y > 4 \Rightarrow z > 4 - y \end{array} \right\} \Rightarrow n > z > 4 - y \Rightarrow n + y > 4 \Rightarrow (n, y) \in R$$

$$\Rightarrow R \circ S \subseteq R$$

$$n + y > 4 \Rightarrow n > 4 - y \Rightarrow \exists z \exists n > z > 4 - y$$

$$\exists z \exists n > z, z > y \Rightarrow n > z > y \Rightarrow R \subseteq R \circ S \Rightarrow R \circ S = R$$

$$S \circ R = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} \exists (n, z) \in R, (z, y) \in S\} =$$

$$\{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} \exists n + z > 4, z > y\}$$

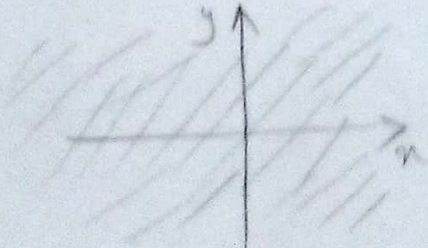
$$\left. \begin{array}{l} n + z > 4 \\ z > y \end{array} \right\} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \exists z > 4 - n, z > y$$

ما بین n و $4-n$ در $\mathbb{R}$ کافی است که عدد حقیقی z موجود باشد که $z > 4-n$ و $z > y$ از طرف z باشد.

$$z > y, z > 4 - n \Rightarrow z > \max\{y, 4 - n\}$$

مثلاً قرار دهیم $z = M + 1$

ما بین n و $4-n$ در $\mathbb{R}$ در رابطه $S \circ R$ شرکت دارند ما بین $S \circ R = \mathbb{R}^2$



مثال، فرض کنید S, R رابطه عایب با دستور زیر بر مجموعه اعداد صحیح باشد

$$R = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad S = \{(n, y) \mid n \mid y, n \in \mathbb{Z}\}$$

n عدد y را
 y بر n قابل قسمت است
 y ضربی از n است
 n عدد y را

مطلوب است روابط زیر

$$R \cup S, R \cap S, R - S, S - R, R \Delta S, \bar{R}, \bar{S}, R \circ S, S \circ R, R^2, S^2$$

$$R \cup S = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 2n \text{ یا } n \mid y\} = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \mid y\}$$

$$nRy \Rightarrow y = 2n \Rightarrow n \mid y \Rightarrow nSy \Rightarrow R \subseteq S \Rightarrow R \cup S = S$$

$$R \subseteq S \Rightarrow R \cap S = R = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 2n\}$$

$$R \subseteq S \Rightarrow R - S = \emptyset$$

$$S - R = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \mid y, y \neq 2n\}$$

$$n \mid y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni y = kn$$

$$\Rightarrow S - R = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z} - \{2\}, y = kn\}$$

$$= \{(n, kn) \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} - \{2\}\} = \{(n, kx) \mid n, k \in \mathbb{Z}, k \neq 2\}$$

$$\Rightarrow R \Delta S = (R - S) \cup (S - R) = \emptyset \cup (S - R) = S - R$$

$$\bar{R} = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (y, n) \in R\} = \{(2y, y) \mid y \in \mathbb{Z}\} = \{(2y, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$$

$$(y, n) \in R \Rightarrow n = 2y$$

$$\bar{S} = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (y, n) \in S\} = \{(ky, y) \mid k, y \in \mathbb{Z}\} = \{(ky, y) \mid k, y \in \mathbb{Z}\}$$

$$(y, n) \in S \Rightarrow y \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni n = ky$$

$$\frac{91}{R \circ S = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists z \in \mathbb{Z} \ni nSz, zRy\}} \quad n \xrightarrow{S} z \xrightarrow{R} y$$

$$\left. \begin{array}{l} nSz \Rightarrow n|z \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni z = kn \\ zRy \Rightarrow y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2z = 2(kn) = (2k)n$$

$$\Rightarrow R \circ S = \{(n, 2kn) \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{(n, an) \mid n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}\}$$

جميع اعداد صحيحة

$$S \circ R = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists z \in \mathbb{Z} \ni nRz, zSy\} \quad n \xrightarrow{R} z \xrightarrow{S} y$$

$$\left. \begin{array}{l} nRz \Rightarrow z = 2n \\ zSy \Rightarrow z|y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni y = kz \end{array} \right\} \Rightarrow y = kz = k(2n) = 2kn$$

$$\Rightarrow S \circ R = R \circ S$$

$$R \circ R = \{(n, y) \mid \exists z \in \mathbb{Z} \ni nRz, zRy\} \quad n \xrightarrow{R} z \xrightarrow{R} y$$

$$\left. \begin{array}{l} nRz \Rightarrow z = 2n \\ zRy \Rightarrow y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2z = 2(2n) = 4n$$

$$\Rightarrow R \circ R = R^2 = \{(n, 4n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(n, 4n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

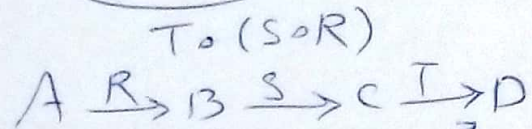
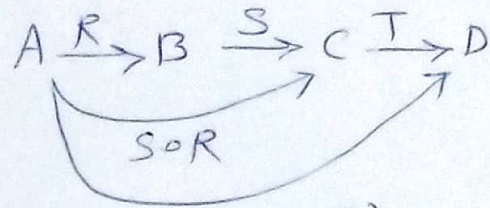
$$S \circ S = \{(n, y) \mid \exists z \in \mathbb{Z} \ni nSz, zSy\} \quad n \xrightarrow{S} z \xrightarrow{S} y$$

$$\left. \begin{array}{l} nSz \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ni z = k_1 n \\ zSy \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ni y = k_2 z \end{array} \right\} \Rightarrow y = k_2(k_1 n) = (k_1 k_2)n = \underbrace{k}_n n$$

$$\Rightarrow S \circ S = \{(n, kn) \mid n, k \in \mathbb{Z}\} = S$$

الف اثر R و S و T به ترتیب سه رابطه قابل ترکیب از A به B ،
از B به C و از C به D باشند آنگاه

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$



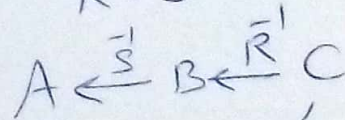
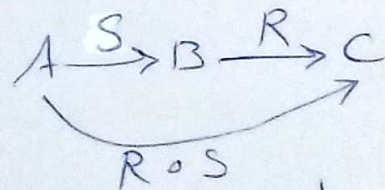
به عبارتی ترکیب رابطه ها دارای
خاصیت شرکت پذیری یا اکتفا
از این رو اغلب برای سزای نوشتن
نمی شود بین

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R = T \circ S \circ R$$

$$(T \circ S) \circ R$$

ب اثر R و S دو رابطه قابل ترکیب باشند آنگاه

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$



$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

توضیح: در ترکیب رابطه ها اثر R یک رابطه روی A (یا A در A) است

$$R \circ R = R^2, R \circ R^2 = R^3, \dots, R \circ R^n = R^{n+1}$$

نویسیم

و تعریف می کنیم

$$R^\infty = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \quad UR^n U \dots = \bigcup_{i=1}^{+\infty} UR^i$$

مقدمات اثر R یک رابطه روی مجموعه n عضوی A است در این صورت

$$R^\infty = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \quad UR^n U \dots = \bigcup_{i=1}^n UR^i$$

و همچنین اثر R بر n عضو $K \in N$ ، $K < n$ داشته ایم $R^K = R^{K+1}$

۹۴

آعاد $R^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ یعنی در این صورت $R^k = R^{k+1} = R^{k+2} = \dots = R^{\infty}$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$

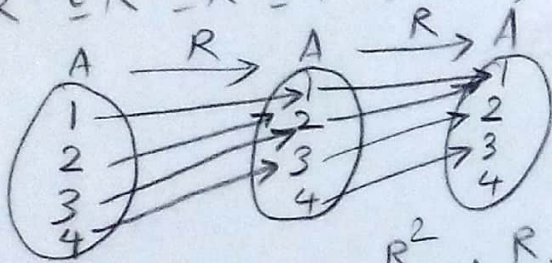
$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

مطلوب است R^n برای $n > 1$ و همچنین R^{∞} .

حل: ابتدا نمودار پیمانه (گراف) A یک مجموعه ۴ عضوی است پس

$R^{\infty} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

یعنی R حد اکثر ۴ مرتبه یکپارچه و در نهایت ترکیبی شود و زوج مرتب جدیدی تشکیل شود پس از ۴ مرتبه دیگر زوج مرتب جدیدی به وجود نمی آید.

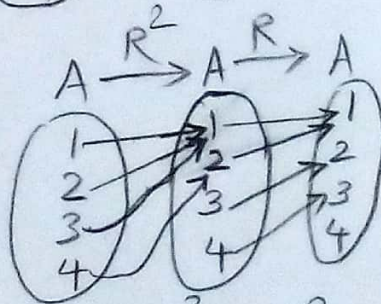


R^2

1	→	1
2	→	1
3	→	1
4	→	2

$\Rightarrow R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$

$R^3 = R \circ R^2$

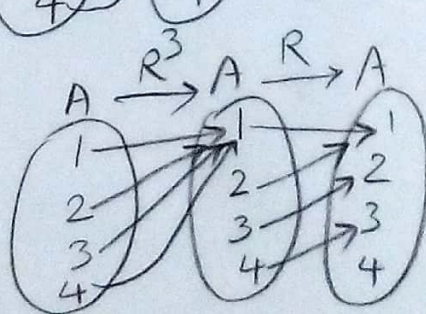


R^3

1	→	1
2	→	1
3	→	1
4	→	1

$\Rightarrow R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$

$R^4 = R \circ R^3$



R^4

1	→	1
2	→	1
3	→	1
4	→	1

$\Rightarrow R^4 = R^3$

$\Rightarrow R^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1)\}$

و واضح است که چون $R^4 = R^3$ پس

$R^5 = R \circ R^4 = R \circ R^3 = R^4 \Rightarrow R^5 = R^3$

$R^6 = R \circ R^5 = R \circ R^3 = R^4 \Rightarrow R^6 = R^3$

$\Rightarrow \forall n \geq 3, R^n = R^3$

94

وامنح است

$$\mathcal{D}(\bar{R}^1) = R(R)$$

$$R(\bar{R}^1) = \mathcal{D}(R)$$

$$R \subseteq S \Rightarrow \bar{R}^1 \subseteq \bar{S}^1$$

$$R \subseteq S \Rightarrow S^c \subseteq R^c$$

$$(R \cup S)^{-1} = \bar{R}^1 \cup \bar{S}^1, (R \cap S)^{-1} = \bar{R}^1 \cap \bar{S}^1$$

$$(R \cup S)^c = R^c \cap S^c, (R \cap S)^c = R^c \cup S^c$$

$$(R \cap S)^2 \subseteq R^2 \cap S^2, (R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n \quad n \geq 1$$

اگر T یک تابع از A به B و R, S دو رابطه از A به B باشند آنگاه

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$

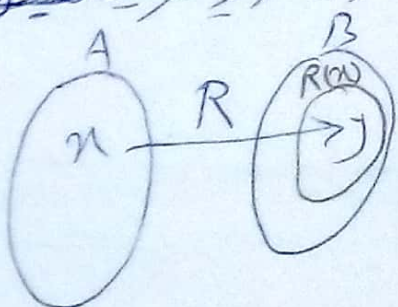
$$(R \cap S) \circ T = (R \circ T) \cap (S \circ T)$$

تعریف: تصویر مستقیم یک عضو تحت یک رابطه و تصویر مستقیم یک مجموعه تحت یک رابطه

اگر R رابطه از A به B باشد در این صورت برای هر $x \in A$ ، تصویر مستقیم x تحت رابطه R (یا سایه مستقیم x تحت رابطه R) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(x) = \{y \in B \mid x R y\}$$

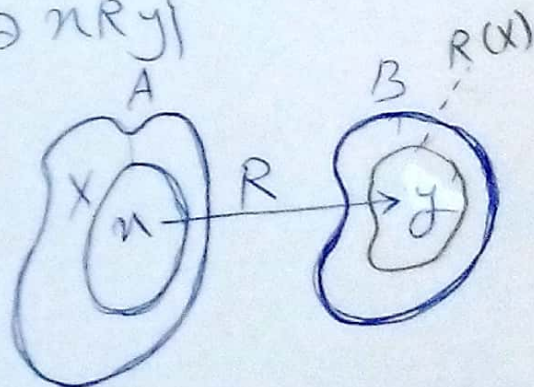
- عبارت مجموعه همه عناصر از B که x با آنها در رابطه است یا از x به سمت آنها یک فلش خارج شده است



و برای هر $X \subseteq A$ ، تصویر مستقیم X تحت رابطه R (یا سایه مستقیم X تحت رابطه R) عبارت است از:

$$R(X) = \bigcup_{x \in X} R(x) = \{y \in B \mid \exists x \in X \text{ such that } x R y\}$$

- عبارت عینی اجتماع تصویر مستقیم همه عناصر X

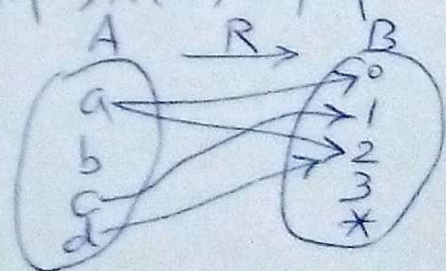


مثال: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{0, 1, 2, 3, *\}$ و $R = \{(a, 0), (a, 2), (c, 1), (d, 2)\}$

در این صورت

$$R(a) = \{0, 2\}, R(b) = \emptyset, R(c) = \{1\}, R(d) = \{2\}$$

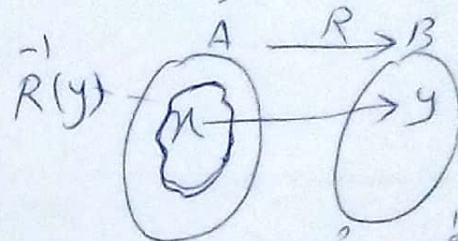
$$R(\{a, b, c\}) = R(a) \cup R(b) \cup R(c) = \{0, 2\} \cup \emptyset \cup \{1\} = \{0, 1, 2\}$$



تعریف: مجموعه‌های A و B یک نقطه یا یک مجموعه تحت یک رابطه

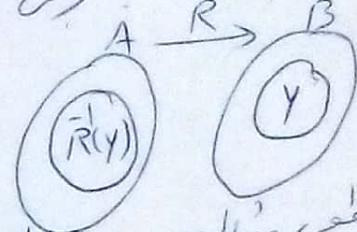
آنها R رابطه از A به B است در این صورت برای $y \in B$ ،
تعریف می‌کنیم تصویر معکوس y تحت رابطه R (یا مجموعه معکوس y تحت رابطه R) عبارت است از،

$$R^{-1}(y) = \{x \in A \mid x R y\}$$



و سطوح مشابه - برای $y \in B$ داریم تصویر معکوس y تحت رابطه R عبارت است از،

$$R^{-1}(Y) = \{x \in A \mid \exists y \in Y \ni x R y\} = \bigcup_{y \in Y} R^{-1}(y)$$



تصویر معکوس در رابطه R صفحه قبل داریم

$$R^{-1}(0) = \{a\}, R^{-1}(1) = \{c\}, R^{-1}(2) = \{a, d\}, R^{-1}(3) = \emptyset$$

$$R^{-1}(x) = \emptyset$$

$$R^{-1}(\{0, 1, 2\}) = R^{-1}(0) \cup R^{-1}(1) \cup R^{-1}(2) = \{a, c, d\}$$

$$R^{-1}(\{0, 1, 2\}) = \{x \in A \mid x R 0 \vee x R 1 \vee x R 2\} = \{a, c, d\}$$

مثال: اگر R رابطه از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ به صورت $y = x^2$ باشد، در این صورت،

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

$$R^{-1}((-2, 3]) = ?$$

$$R((-2, 3]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in (-2, 3] \ni xRy\}$$

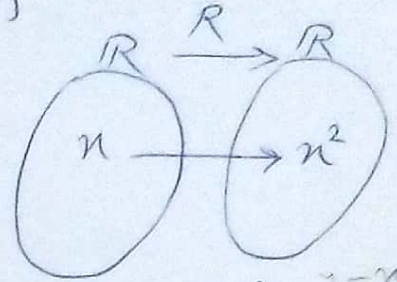
$$xRy \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow R((-2, 3]) = \{x^2 \mid -2 < x \leq 3\}$$

$$-2 < x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} -2 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 4 \\ 0 < x \leq 3 \Rightarrow 0 < x^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow R((-2, 3]) = [0, 9]$$

$$R^{-1}([-5, 8)) = ?$$

$$R^{-1}([-5, 8)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in [-5, 8) \ni xRy\} \xrightarrow{y=x^2} \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x^2 < 8\}$$



$$-5 \leq x^2 < 8 \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} 0 \leq x^2 < 8 \Rightarrow |x| < \sqrt{8} \Rightarrow -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow R^{-1}([-5, 8)) = (-\sqrt{8}, \sqrt{8})$$

حقائق اساسی رابطه‌ها: $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \subseteq x_2 \Rightarrow R(x_1) \subseteq R(x_2) \quad 1 \text{ الف}$$

$$\forall y_1, y_2 \in B \quad y_1 \subseteq y_2 \Rightarrow R^{-1}(y_1) \subseteq R^{-1}(y_2) \quad 1 \text{ ب}$$

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad R(x_1 \cup x_2) = R(x_1) \cup R(x_2) \quad 1 \text{ ج}$$

$$R(x_1 \cap x_2) \subseteq R(x_1) \cap R(x_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in B \quad R^{-1}(y_1 \cup y_2) = R^{-1}(y_1) \cup R^{-1}(y_2) \quad 1 \text{ د}$$

$$R^{-1}(y_1 \cap y_2) \subseteq R^{-1}(y_1) \cap R^{-1}(y_2)$$

$$R(\emptyset) = \emptyset, \quad R^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad 1 \text{ ه}$$

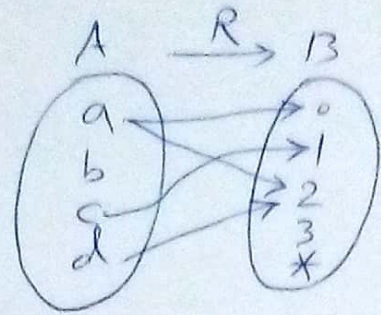
حقائق اساسی رابطه‌ها: S و R هر دو رابطه‌ها از A به B باشند، بطوریکه

$$\forall x \in A: R(x) = S(x)$$

$$R = S \quad 1 \text{ ف}$$

9A

$X_1 = \{a, c\} \subseteq A$ اگر



مجموعه‌ها، رابطه
 $X_2 = \{d, b\} \subseteq A$
 رابطه

$X_1 = \{a, c\}$ $X_2 = \{d, b\}$ $X_1 \cup X_2 = \{a, b, d, c\}$
 $R(X_1) = \{0, 1, 2\}$ $R(X_2) = \{2\}$ $R(X_1 \cup X_2) = \{0, 1, 2\} = R(X_1) \cup R(X_2)$

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$
 $R(X_1 \cap X_2) = R(\emptyset) = \emptyset \subseteq R(X_1) \cap R(X_2) = \{2\}$
 $\emptyset \subseteq \{2\}$
 $R(X_1) \cap R(X_2) = \{0, 1, 2\} \cap \{2\} = \{2\}$
 و مجموعه‌ها، اگر $Y_2 = \{1, 2\} \subseteq B$ ، $Y_1 = \{0, *, 3\} \subseteq B$

$Y_1 = \{0, *, 3\}$ $Y_2 = \{1, 2\}$ $Y_1 \cup Y_2 = \{0, 1, 2, 3, *\}$
 $\bar{R}(Y_1) = \{a\}$ $\bar{R}(Y_2) = \{a, c, d\}$ $\bar{R}(Y_1 \cup Y_2) = \{a, c, d\}$
 $\phantom{\bar{R}(Y_1 \cup Y_2)} = \bar{R}(Y_1) \cup \bar{R}(Y_2)$

$Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$
 $\bar{R}(Y_1 \cap Y_2) = \emptyset$ ، $\bar{R}(Y_1) \cap \bar{R}(Y_2) = \{a\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \Rightarrow$
 $\bar{R}(Y_1 \cap Y_2) \subsetneq \bar{R}(Y_1) \cap \bar{R}(Y_2)$
 $\frac{\emptyset}{\phantom{\bar{R}(Y_1 \cap Y_2)}} \subsetneq \frac{\{a\} \cap \{a, c, d\}}{\{a\}}$

توضیح: اگر رابطه خاص از R به A و B باشد بطوریکه
 اگر $\forall x \in A: \exists y \in B \ni x R y$ این
 $\bigcup R = A$ تایید
 $\forall x \in A: \exists ! y \in B \ni x R y$

بین مقویر و عضو، منحصر فرد باشد یا نه، معنی A، دقیقاً یک عضو B
در این صورت R، این تابع از A به B می گویند.

با این رابطه $A \rightarrow B$ یک تابع است اگر و تنها اگر

$$\forall x \in A : \exists! y \in B \ni xRy$$

که در این حالت مقویر x را (عضو) منحصر فرد است $y = R(x)$ (مثلاً)

مثال اکدامتیک از رابطه بر روی R که تابع است. تابع : Function

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + |y| = 1\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 = 1\}$$

$$R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 1\}$$

حل 1 در R_1 واضح است که

$$D_{R_1} = [0, +\infty) \neq \mathbb{R}$$

بین x مقویر و صورت ندارد پس $R_1 \subset \mathbb{R}$ تابع نیست.

در R_2 $x = 1$ بین $y = \frac{1}{x}$ پس $y = 1$ بین $x = 0$ مقویر و صورت ندارد
بین $D_{R_2} = \mathbb{R} - \{0\}$ پس R_2 هم تابع نیست.

در R_3 $x + |y| = 1$ بین $x = 1$ پس $y = \pm(1-x)$ بین x در $\mathbb{R}$ با
در عضو $\mathbb{R}$ رابطه دارد پس مقویر اکثراً منحصر فرد نیست پس
 R_3 تابع نیست. $-2R_3 - 3$ و $-2R_3 - 3$ و یا $x = 1 - |y|$ پس x مقویر ندارد.

در R_4 $x + y^2 = 1$ بین $y^2 = 1 - x$ پس $y = \pm\sqrt{1-x}$ در این حالت
با $x \leq 1$ بین $D = (-\infty, 1]$ بین $x > 1$ مقویر ندارد و یا به این دلیل که

$$y^2 = 1 - x \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x}$$

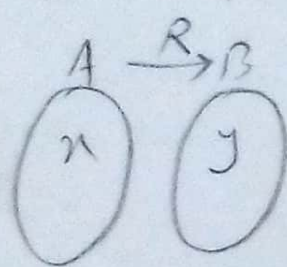
عین تغییر می‌دهد، در y برای مقبولیت وجود دارد پس R_4 تابع نیست

در R_5 ، $x^2 + y = 1$ پس $y = 1 - x^2$ ، برای x در R

دقیقاً یک مقدار $y = 1 - x^2$ وجود دارد پس R در R یک و دقیقاً یک مقبولیت رابطه R_5 دارد عین این تابع است که در این حالت تابع R_5 را صورت زیر نمایش می‌دهند

$$\begin{array}{ccc} R_5: R & \longrightarrow & R \\ x & \longrightarrow & 1 - x^2 \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{R_5} & R \\ x & \longrightarrow & 1 - x^2 \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{ccc} R_5: R & \longrightarrow & R \\ R_5(x) & = & 1 - x^2 \end{array}$$

توضیح: قابل ذکر است که اگر R یک رابطه از A در B باشد منظور از



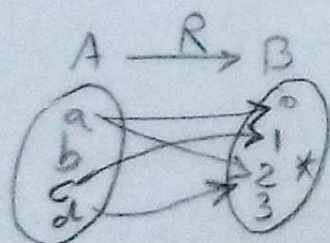
دامنه رابطه R ، مجموعه همه عناصر از A است مانند x که عناصر از B مانند y در رابطه باشند، به عبارتی دست کم یک فلش از x به y باشد عین

$$D_R = R^{-1}(y) = \{x \in A \mid \exists y \in y \exists x R y\} = \{x \in A \mid \exists y \in y \exists (x, y) \in R\} \subseteq A$$

، همچنین مقبولیت رابطه R ، مجموعه همه عناصر از B مانند y است که دست کم یک فلش به y باشد عین A مانند x در رابطه باشند یا به عبارتی دست کم یک فلش از سمت A به سمت y نشان داده شده عین

$$R_R = R(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \exists x R y\} = \{y \in B \mid \exists x \in A \exists (x, y) \in R\} \subseteq B$$

بطور مثال در رابطه



$$D(R) = \{a, c, d\} \subseteq A, \quad R(R) = \{1, 2\} \subseteq B$$

و اگر R یک تابع از A به B باشد

$$D(R) = A, \quad R(R) = R(A)$$

بطور مثال در تابع R_5 در R کلاس مقصور

$$D(R_5) = R, \quad R(R_5) = \{1 - x^2 \mid x \in R\} = (-\infty, 1]$$

۱- بر مجموعه اعداد حقیقی، روابط S, R را به صورت زیر تعریف کنید

تعیین: $R = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n > y\}$, $S = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n < y\}$
مطلوبه: روابط R و S را بر صفرمختصات $\mathbb{R}^2$.

$R, S, R \cup S, R \cap S, R - S, S - R, R \Delta S, \bar{R}, \bar{S}, R^c, S^c, R \circ S, S \circ R, R^2, S^2$

۲- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$

و $S = \{(3, 1), (4, 1), (3, 3), (3, 4), (1, 1), (1, 4)\}$ مطلوب است تعیین روابط زیر

$R \circ S, S \circ R, R^2, S^2$

۳- اثر R و S (در رابطه به صورت زیر بر مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد،

$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 4)\}$

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$

مطلوبه: ۱- تعیین زوج‌های مرتب، روابط زیر

$R \circ S, S \circ R, R^2, S^2, R^3, S^3$

۴- فرض $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

روابط S و T را در A (تعیین کنید که $S \neq T$ و S و T)

$S \circ R = T \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4)\}$

۵- فرض $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

کدام روابط از A به B به شکل R^2, R^3 است.

۶- اثر R که رابطه از A به B و S و T دو رابطه از B به C باشد آنگاه

نات کنید

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$$(S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

۱.۲
۷- فرض کنید R, S دو رابطه در A باشند که برای $n \in \mathbb{N}$

$$(R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$$

۸- فرض کنید R رابطه در $\mathbb{N}$ است و

$$R = \{(n, y) \mid n, y \in \mathbb{N}, n - y > 4\}$$

۱- مجموعه R را رسم کنید

$$R(1), R(2), R(3), R(4), \dots, R(10), R(11), R(12), \dots$$

$$R(1), R(2), R(3), R(4)$$

۹- فرض کنید R رابطه زیر مجموعه اعداد طبیعی باشد، معلوم است $R \cap R^{-1}$

$$\forall n, y \in \mathbb{N} : n R y \iff n \mid y$$

۱- ثابت کنید

$$A \times B = B \times A \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

۱۱- مقایسه n را در هر یک از موارد زیر جابجایی کنید که روابط زیر تابع باشند

$$R_1 = \{(n, 1), (n^2, 1), (1, n), (1, n^2)\}$$

$$R_2 = \{(3, 4), (3, n), (y, 4), (3, y^2)\}$$

$$R_3 = \{(-2, 1), (-2, n), (1, 4), (n, y)\}$$

۱۲- در هر یک از موارد زیر متعلق بودن توابع را تحقیق کنید

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = x^2 \mid -x^2 = |y| + 1 \mid y = \frac{1}{x} \mid y = [x]$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$y = [x] \mid y = \sqrt{3x}$$

توضیح تابع $f: A \rightarrow B$ را به گونه عرّاب

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

و f را به گونه عرّاب $R(f) = B$

$$\forall y \in B \exists x \in A \ni x f y$$

$$\forall y \in B \exists x \in A \ni y = f(x)$$

۱۰۳
۱۳- اگر A یک مجموعه m عضو و B یک مجموعه n عضو باشد مطلوب است

- الف) تعداد توابع موجود از A به B .
- ب) تعداد توابع یک به یک از A به B .
- ج) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000

خواص رابطه عا

آثر R رابطه ورودی مجموعه A است در این صورت R^* رابطه عا است

$$\forall x \in A : xRx$$

 R^* ضد بازتابی است

$$\forall x \in A : xRx$$

 R^* عا است

$$\forall x, y \in A : xRy \Leftrightarrow yRx$$

 R^* ضد عا است

$$\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx \text{ ! } x=y$$

رابطه عا است

$$\forall x, y \in A : xRy, yRx \Rightarrow x=y$$

 R^* عا است

$$\forall x, y, z \in A : xRy, yRz \Rightarrow xRz$$

واضح است که

$$R \subseteq \Delta_A \Leftrightarrow R \text{ بازتابی است}$$

$$\Delta_A \cap R = \emptyset \Leftrightarrow R \text{ ضد بازتابی است}$$

$$R \text{ عا است} \Leftrightarrow R^{-1} = R$$

$$R \text{ ضد عا است} \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$$

$$R \text{ عا است} \Leftrightarrow R^2 \subseteq R$$

همچنین آثر $R^2 \subseteq R$ بر اصل نقیض شود برای $n \in \mathbb{N}$

$$R^n \subseteq R$$

و در نتیجه $R^\infty = R$ و علامه R است

برای $\forall n \in \mathbb{N} : R^n \subseteq R$ R عا است
مثال در روی R رابطه R عا است
کاملاً و تماماً در حقیقت

$$\frac{1.0}{nRy} \iff n \leq y$$

$$\forall n \in \mathbb{R} : n \leq n \Rightarrow n R n \Rightarrow \begin{matrix} a \\ 1 \end{matrix} \in \mathbb{R}$$

اوس [۷]، راجعہ، سبکداری، اس

$$\forall n_1 \in \mathbb{Z} \quad 1 \mid n_1 \iff n_1 \mid 1$$

عنه وقرئ مصححاً / ان

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n = 1 \times n \Rightarrow n | n$$

مثال ۱۰ در $\mathbb{R}$ تابع f را ملاحظه کنید

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, nRy \iff n < y$$

$\forall n, y \in \mathbb{R}, nRy \iff n < y$
 $\forall n \in \mathbb{R} : n \not R n \implies \nexists n \in \mathbb{R} : nRn \implies \nexists n \in \mathbb{R} : nRy \equiv n > y$ (بما أن $n < n$ غير ممكن)

$\forall n \in \mathbb{R} : n \nless n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{R} : n \nless n \Rightarrow n \nless n$ (بجای $n \nless n$ می‌نویسند)

مجموعه اشعار در کربلا و زین العابدین علیه السلام

$nRy \Leftrightarrow nRy$

معبر انسان از خودی حواشر نیست $\Rightarrow \neg R y$
 راعی را ندارد یعنی این را بطور صد بار می است.

مثال: مجموع اعداد حقیق

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \iff n+y > 1$$

$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \Leftrightarrow n+y \in \mathbb{Z}$
 $\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \Rightarrow n+y > 1 \Rightarrow y+n > 1 \Rightarrow yRn$

محمد اکرم خان صاحب کراچی

$\forall x, y: xRy \iff \exists z, w, u, v, t, s, r, q, p, n$

$\mathcal{N}Ry \Rightarrow$ محمود را نشویند (استفهام) / اراغی درم رفته بود که اتفاقاً است
 $\mathcal{N}Ry$ هم رفته است

$$\forall n, y: nRy \iff$$

۱.۴ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ در علم رشته‌اند
 مجموعه دانشجو
 دانشجو ی، دانشجو $\Rightarrow$ رشته $\mathbb{N}$ در رشته دانشجو و یکبار $\Rightarrow \mathbb{N}$ علم رشته است.
 $\Rightarrow yRn$

و علم صبیح معوزن بود (دعای قد بود) از علم صبیح بود (بین اشارات و تکرار)
 از این مقارن است.

مثال ۱: مجموعه اعداد حقیقی، رابطه $\leq$ ، ضد تقارن است.
 $\forall n, y \in \mathbb{R} \quad nRy \Leftrightarrow n \leq y$

$nRy, yRn \Rightarrow n \leq y, y \leq n \Rightarrow n = y$

و همچنین رابطه خواص تر بود (در مجموعه آدم که از زندگی و تکرار فنی)

شخص n خواص تر از y است $\Rightarrow nRy$

خواص تر از n نیست $\Rightarrow n \Rightarrow$ خواص تر از y است $\Rightarrow yRn$

و همچنین رابطه n فرزند y است بر مجموعه آدم که از زندگی ضد تقارن است
 و بر مجموعه اعداد صحیح، رابطه، کارش ضد تقارن نیست.

$\forall n, y \in \mathbb{Z} \quad nRy \Leftrightarrow n \mid y$

$nRy, yRn \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \exists y = axn, \exists b \in \mathbb{Z} \exists n = by$

$\Rightarrow n = b \times (axn) \Rightarrow n = abn \xrightarrow[n \neq 0]{\text{از هر دو طرف ضرب کنیم}} ab = 1 \xrightarrow{a, b \in \mathbb{Z}} a = b = 1$

مثلاً $a = b = -1, 3 \neq -3, 3 \mid -3, -3 \mid 3$
 اثر $a = b = -1$ در این صورت $n = -y$ بین n و y قرینه اند و لزوماً برابر نیستند، در حالت خاص اثر اینها بر مجموعه اعداد طبیعی باشد داریم،

رابطه کارش ضد تقارن است
 بر مجموعه اعداد طبیعی
 $ab = 1 \xrightarrow{a, b \in \mathbb{N}} a = b = 1 \Rightarrow y = n$

مثال ۱: مجموعه اعداد صحیح، رابطه، کارش ضد تقارن است.

$\forall n, y, z \in \mathbb{Z} \quad nRy, yRz \Rightarrow nRz$ ؟

$nRy \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \exists y = an$

$$\forall y R z \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z} \exists z = by$$

$$\Rightarrow z = b \times (an) = \underbrace{ab}_c n$$

$$\Rightarrow z = cn \Rightarrow n | z \Rightarrow \text{را به } c \text{ تقسیم می شود}$$

بر مجموعه $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) یک رابطه R را تعریف می کنیم به صورت زیر:

$$\forall n, y, z, \quad n R y, y R z \Rightarrow n R z$$

$$\begin{aligned} n R y &\Rightarrow \left. \begin{aligned} n \text{ بر } y \text{ بخش پذیر است} \\ y \text{ بر } z \text{ بخش پذیر است} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z, n \Rightarrow n R z \end{aligned}$$

و همچنین بر مجموعه $\mathbb{Z}$ یک رابطه R را تعریف می کنیم به صورت زیر:

مثال ۱: بر مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ یک رابطه R را تعریف می کنیم به صورت زیر:

$$*R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$(3, 3) \notin R_1 \Rightarrow R_1 \text{ ریفلیکس نیست}$$

$$(1, 1) \in R_1 \Rightarrow \text{نه}$$

$$(3, 4) \in R_1, (4, 3) \notin R_1 \Rightarrow R_1 \text{ تقارنی نیست}$$

$$1 R_1 2, 2 R_1 1, 1 \neq 2 \Rightarrow R_1 \text{ ضد تقارنی نیست}$$

$$3 R_1 4, 4 R_1 1, 3 \neq 1 \Rightarrow R_1 \text{ متعدی نیست}$$

$$*R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$4 R_2 4 \Rightarrow R_2 \text{ ریفلیکس نیست}$$

$$1 R_2 1 \Rightarrow \text{نه}$$

$$R = R^{-1} \Rightarrow R_2 \text{ تقارنی است}$$

$$2 R_2 1, 1 R_2 2, 2 \neq 1 \Rightarrow R_2 \text{ متعدی نیست}$$

$$*R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$\Delta_A \subseteq R_3 \Rightarrow R_3 \text{ ضد بازتابی نیست}$$

$$R = R^{-1} \Rightarrow \text{تقارن نیست}$$

$$2R_1, 1R_4, 2R^4 \Rightarrow \text{تعدیل نیست}$$

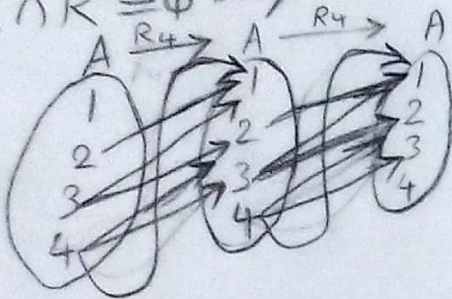
$$*R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$1R_1 \Rightarrow \text{بازتابی نیست}$$

$$(\Delta_A \cap R_4 = \emptyset \Rightarrow \text{ضد بازتابی است}) \quad (1R_1, 2R_2, 3R_3, 4R_4)$$

$$3R_2, 2R_3 \Rightarrow \text{تقارن نیست}$$

$$R \cap R^{-1} = \emptyset \Rightarrow \text{ضد تقارن است}$$



$$\begin{array}{l} 3 \xrightarrow{R_4} 2 \xrightarrow{R_4} 1 \Rightarrow 3 \xrightarrow{R_4^2} 1 \\ 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \Rightarrow 4 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \Rightarrow 4 \rightarrow 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$R_4^2 = \{(3,1), (4,1), (4,2)\} \subseteq R \Rightarrow R \text{ تعدیل است}$$

$$*R_5 = \{(3,4)\}$$

$$\Delta_A \cap R = \emptyset \Rightarrow \text{بازتابی نیست و ضد بازتابی است}$$

$$3R_4, 4R_3 \Rightarrow \text{تقارن نیست}$$

$$R^{-1} \cap R = \emptyset \Rightarrow \text{ضد تقارن است}$$

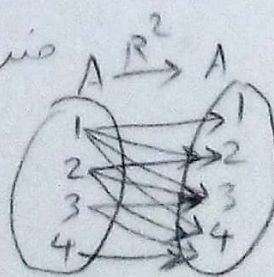
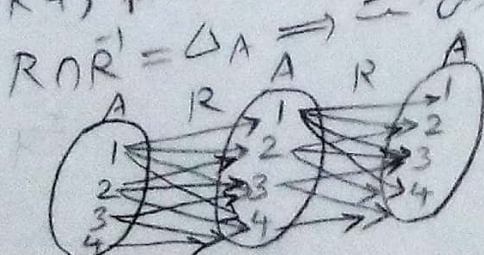
برای تعدیل بودن باید ترکیب زوجهای قابل ترکیب خود را داشته باشد و بازتابی
مقدار صفر و دو زوج قابل ترکیب ندارد پس تعدیل است و یا صفر

$$R_5^2 = \emptyset \Rightarrow R_5^2 \subseteq R_5 \Rightarrow R_5 \text{ تعدیل است}$$

$$*R_6 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

$$\Delta_A \subseteq R \Rightarrow \text{بازتابی است}$$

$$1R_4, 4R_1 \Rightarrow \text{تقارن نیست}$$



$$\Rightarrow R^2 = R \subseteq R \Rightarrow R \text{ تعدیل است}$$

مثال ۱.۹: $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < 1$ را در $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < 1$$

$$|x-x| = 0 < 1 \checkmark \Rightarrow \text{بازتاب نیست} \Rightarrow \text{صورتی نیست}$$

$$|x-y| < 1 \Rightarrow |y-x| = |x-y| < 1 \Rightarrow \text{تقارن نیست}$$

$$|x-y| < 1, |y-z| < 1 \not\Rightarrow |x-z| < 1$$

$$x = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}, y = 0, |x-y| = \frac{1}{2} < 1, |y-z| = \frac{1}{2} < 1, |x-z| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \not< 1$$

تعدیل نیست

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq 1$$

$$x=1 \Rightarrow |1+1| = 2 \not\leq 1 \Rightarrow \text{بازتاب نیست}$$

$$x=0 \Rightarrow |0+0| = 0 \leq 1 \Rightarrow \text{صورتی نیست}$$

$$|x+y| \leq 1 \Rightarrow |y+x| = |x+y| \leq 1 \Rightarrow \text{تقارن نیست}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1, y=0, z=1 \\ |x+y| = 1+0=1 \leq 1 \\ |y+z| = 0+1=1 \leq 1 \\ |x+z| = 1+1=2 \not\leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعدیل نیست}$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| = |y|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |x| \Rightarrow \text{بازتاب نیست} \Rightarrow \text{صورتی نیست}$$

$$|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow \text{تقارن نیست}$$

$$|x| = |y|, |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z| \Rightarrow \text{تعدیل نیست}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y$$

$$x=3 \Rightarrow 3^2 + 3^2 \leq 4, 3 \geq 3 \Rightarrow \text{بازتاب نیست}$$

F T

$$x=0: 0^2 + 0^2 \leq 4, 0 \geq 0 \Rightarrow \text{صورتی نیست}$$

F T

$$x=2, y=0: 2^2 + 0^2 \leq 4, 2 \geq 0 \Rightarrow \text{تعدیل نیست}$$

F T

$$xRy, yRx \Rightarrow x \geq y, y \geq x \Rightarrow x=y \Rightarrow \text{تعدیل نیست}$$

$$x=1, y=0, z=-2: \left. \begin{array}{l} 1^2 + 0^2 \leq 4, 1 \geq 0 \Rightarrow 1R0 \\ 0^2 + (-2)^2 \leq 4, 0 \geq -2 \Rightarrow 0R-2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1R-2 \nRightarrow$$

بنابراین واضح است که برای هر رابطه R مجموعه A مانند A داریم:

$$R \text{ بازتابی است} \iff \forall x \in A, x \in R(x)$$

$$\text{"} \iff \bar{R}^1 \text{ هم بازتابی است}$$

$$\text{"} \iff \bar{R}^c \text{ ضد بازتابی است}$$

$$R, S \text{ هر دو بازتابی است} \implies R \cap S, R \cup S \text{ بازتابی است}$$

$$R \text{ تقارنی است} \iff \forall x, y \in A, (x \in R(y) \iff y \in R(x))$$

$$\iff \bar{R}^c, \bar{R}^1 \text{ هم تقارنی است}$$

$$R, S \text{ هم تقارنی است} \iff R \cap S, R \cup S \text{ تقارنی است}$$

$$R \text{ نقیصه است} \iff \forall x, y, z \in A: (x \in R(y), z \in R(y) \implies z \in R(x))$$

$$R, S \text{ نقیصه است} \implies R \cap S \text{ نقیصه است}$$

III) ستار یک رابطه (ستار بازتابی - ستار تقارنی - ستار نقیصه)
 closure ستار

اثر R یک رابطه معمولی A باشد منظور از ستار بازتابی رابطه R که $\bar{R}_{nn}$ نشان داده شود کوچکترین (از نظر مجموعه) رابطه A است که هم زوجهای R را داشته باشد و علاوه بر آن خاصیت بازتابی هم داشته باشد. به عبارتی

$$\bar{R}_{nn} = R \cup \Delta_A$$

و منظور است ستار تقارنی R که $\bar{R}_{ny}$ نشان داده شود کوچکترین رابطه A است که هم زوجهای R را داشته باشد و علاوه بر آن خاصیت تقارنی داشته باشد.

$$\bar{R}_{ny} = R \cup \bar{R}^{-1}$$

و ستار نقیصه! ستار نقیصه R در واقع رابطه R ، ترکیب هم زوجهای R است که دارای خاصیت نقیصه باشد، واضح است که

$$R \text{ نقیصه} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^{\infty}$$

اثر A n مجموعه A باشد و واضح است که $R^{\infty} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$
 مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ و منظور است کلیه ستارهای رابطه R در A .

حل 1 $\bar{R}_{nn} = R \cup \Delta_A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

و $\bar{R}_{ny} = R \cup \bar{R}^{-1} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4)\}$

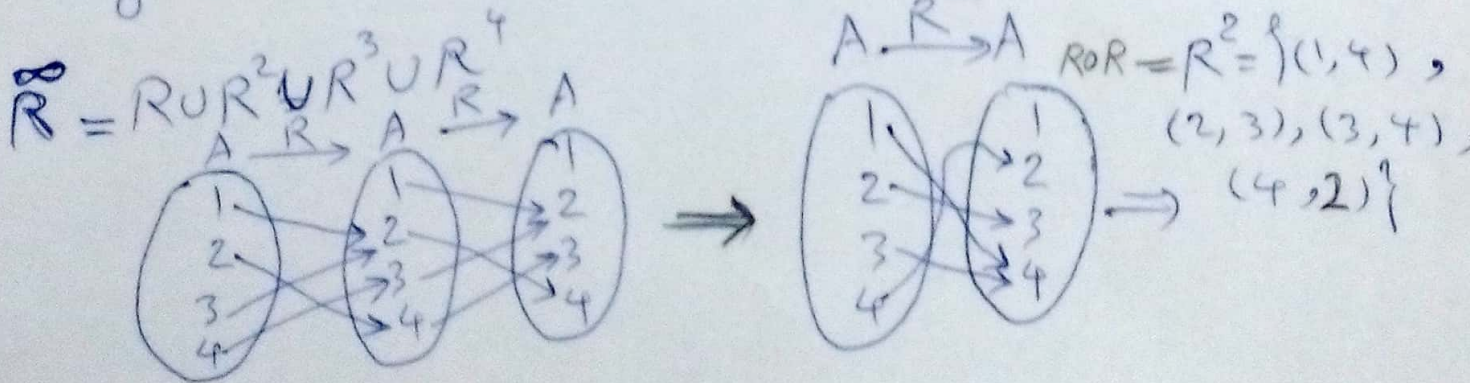
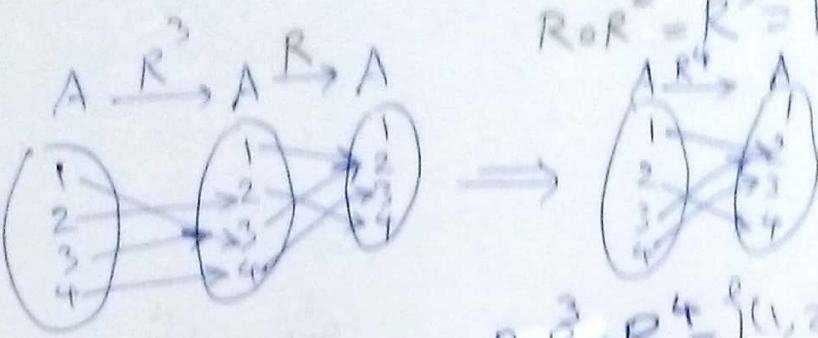


Diagram illustrating the composition of two relations R^2 and R to form R^3 :

Left side: $A \xrightarrow{R^2} A \xrightarrow{R} A$. The first two sets A are connected by relation R^2 , and the second two sets A are connected by relation R .

Right side: $A \xrightarrow{R^3} A$. The first and third sets A are connected by the resulting relation R^3 .

The diagram shows the mapping of elements from the first set to the third set through the composition of R^2 and R .



$$R \circ R = R^4 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\} \rightarrow R$$

واعض است در حالت اول

$$\text{Gal}(\bar{K}/K) \iff \bar{K} = K \iff \bar{K}_{\text{ind}} = K$$

$$\text{cis-} \begin{array}{c} R \\ | \\ C=C \\ | \\ R \end{array} \longleftrightarrow VnCN(R^n)CR \longleftrightarrow R^B = R$$

مقاله محمد بن اعداد صبح ، اسطخا، R با دستور تریف شده است ،
سپتا ، خا و هوا ، آماوند ، اسطخا، R ایستین کینه .

$$\forall n, y \in \mathbb{Z}, nRy \iff n|y|n$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n | m \Rightarrow \frac{a}{10^n} \in R \Rightarrow \bar{R}_m = R$$

$\forall n \in \mathbb{Z}: x \mid n \Rightarrow \dots$

$\forall n, y \in \mathbb{Z}: x \mid y \Rightarrow x \mid y \mid x \Rightarrow y \mid x \mid y \Rightarrow \dots$

$$yRn \Rightarrow \sigma_{\bar{y}} \bar{w} R \Rightarrow \bar{R}_{ny} = R$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : xRy, yRz \Rightarrow (x|y \wedge y|x), (y|z \wedge z|y)$$

واضح است که رابطه R عددی نیست زیرا بطور مثال

$$4R2, 2R6, 4R6$$

باری که با R رابطه دارد، R^∞ را می‌توانیم بنویسیم
 $R^\infty = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ ، R^2 از طرف چپ یا راست

$$R^2 = \{(n, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists z \in \mathbb{Z} \exists nRz, zRy\}$$

$$nRz \Rightarrow n|z \wedge z|m \Rightarrow$$

$$zRy \Rightarrow z|y \wedge y|z \Rightarrow$$

$$(n|z, z|y) \wedge (z|n, y|z) \wedge (z|n, z|y) \wedge (z|n, y|z) \Rightarrow (n|y) \wedge (y|n) \Rightarrow nR^2y$$

$$n|y \Rightarrow nR^2y$$

$$z \in [n, y] \text{ و } n, y \text{ ر.م.م. مشترک (کوچکترین مضرب مشترک)}$$

$$\Rightarrow n|z, y|z$$

یا اثر قرار دهم

$$z = (n, y) \text{ ر.م.م. مشترک}$$

$$\Rightarrow z|n, z|y$$

چون $(n, y) \in \mathbb{Z}^2$ و R^2 رابطه عددی است

$$R^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow R^\infty = \mathbb{Z}^2$$

مثال: بر مجموعه $\mathbb{Z}$ یک رابطه R را تعریف کنیم

$$\forall n, y \in \mathbb{Z} \quad nRy \iff \text{تعداد ارقام } n \text{ با تعداد ارقام } y \text{ یکسان باشد}$$

مثلاً: $1234R5678$ و $1234R56789$ اما $1234 \not R 567890$

حل: از آنجا که هر کلمه n از لغت نامتناهی تعداد ارقامش با خود یکی است
 $R_{nn} = R$ است باری که

و همچنین اگر کلمه n با کلمه y تعداد ارقامش برابر باشد پس nRy

هم تعداد حرفش با n یک است یعنی

$$nRy \Rightarrow yRn \Rightarrow R \text{ تقارن است} \Rightarrow \bar{R}_{ny} = R$$

و اگر n در R سه مرتبه فارسی باشد بطوریکه تعداد حرف n یک است و تعداد حرف y باشد R یک است در این صورت تعداد حرف n در R برابر است با n

$$\forall n, y, z \quad nRy, yRz \Rightarrow nRz \Rightarrow R \text{ متعدی است} \Rightarrow R^\infty = R$$

بنابراین

چون

برای یافتن سببها یک رابطه، باید به حداقل زودهای ممکن رابطه اضافه کرد تا خاصیت یادگیری مورد نظر را پیدا کند.

$$R \cup \Delta A = R \cup \Delta A = R_{nn} = \bar{R}_{nn} = \text{سببها بازنمایی } R$$

$$R \cup \bar{R} = R \cup \bar{R} = \bar{R}_{ny} = \bar{R}_{ny} = \text{تقارن } R$$

$$R \cup R^\infty = R \cup R^\infty = R^\infty = R^\infty = \text{تعدی } R$$

اگر R رابطه ای در n مجموعه n عضو A باشد.

توضیح

رابطه R^∞ ، این رابطه نشان می دهد که بین کدامیک از اعضا A یک مسیر ارتباطی وجود دارد، این رابطه رابطه ارتباطی یا رابطه دسترس پذیری هم می گویند. اگر A رابطه ای روی A باشد تعریف می کنیم

$$nR^\infty y \iff \text{مسیر بین } n \text{ و } y \text{ موجود باشد یعنی}$$

$$nRy \subseteq nR^2y \subseteq nR^3y \subseteq \dots$$

و اگر A یک مجموعه n عضو A باشد تعریف می کنیم

$$nR^*y \iff nR^\infty y \subseteq n=y$$

۱- در هر یک از روابط زیر، خواص بازتابی، ضد بازتابی، تقارنی، ضد تقارنی و متعدی را بررسی کنید.

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \Leftrightarrow |n| = |y|$$

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \Leftrightarrow n \leq y$$

$$\forall n, y \in \mathbb{N}, \quad nRy \Leftrightarrow n + y \leq 8$$

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \Leftrightarrow n + y > 1$$

$$\forall n, y \in \mathbb{N}, \quad nRy \Leftrightarrow (n, y) = 1$$

(n, y) بزرگترین مقسوم علیه مشترک n و y

$$\forall n, y \in \mathbb{N}, \quad nRy \Leftrightarrow n|y$$

$$\forall n, y \in \mathbb{Z}, \quad nRy \Leftrightarrow n|y$$

$$\forall n, y \in \mathbb{Q} - \{0\} : \quad nRy \Leftrightarrow \frac{n}{y} \text{ یک عدد صحیح است}$$

بر مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، رابطه ها زیر

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R_5 = \{(1, 2)\}$$

$$R_6 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

$$R_7 = \emptyset$$

بر مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، دو رابطه متعدی تعریف می شود. x به ترتیب از y است -
 واندین یکسان دارند - رنگ موی n در یکسان است.

بر مجموعه $\mathbb{R}^2$

$$\forall (n, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (n, y)R(z, t) \Leftrightarrow n + t = y + z$$

۲- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را طریقی تعریف کنید که
 الف با زبان مقارن باشد ولی مقدم نباشد.
 ب با زبان مقارن باشد ولی مقدم نباشد.
 ج با زبان مقارن باشد ولی مقدم نباشد.
 د با زبان مقارن و مقدم نباشد.

۳- اثر A یک مجموعه n عنصری باشد تعیین کنید.
 الف احین رابط با زبان بر A می توان تعریف کرد.
 ب مقارن بر A می توان تعریف کرد.
 ج با زبان بر A می شود تعریف کرد.
 د هیچ رابط مقارن بر A می شود تعریف کرد.
 ه احین رابط که با زبان و نیز با زبان باشد می شود تعریف کرد.

۴- در زیر گزاره ها را در تحقیق کنید.
 - ترکیب دو رابط با زبان، با زبان است.
 - ترکیب دو رابط با زبان، با زبان است.
 - ترکیب دو رابط مقارن، مقارن است.
 - ترکیب دو رابط مقارن، مقارن است.
 - ترکیب دو رابط مقدم، مقدم است.
 - اثر R و S دو رابط مقارن باشند آنگاه $R \cup S$ ، $R \cap S$ نیز مقارن است.
 - اثر R مقارن باشد آنگاه R^c نیز مقارن است.
 - اثر R مقدم باشد آنگاه R^c نیز مقارن است.
 - اثر R و S با زبان باشد آنگاه $R \cup S$ نیز مقارن است.
 - اثر R و S مقارن باشد آنگاه $R \cap S$ نیز مقارن است.

۵- بر مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ رابطه R به صورت های زیر تعریف شده است، $\frac{117}{11}$
 طبعاً ستاره های R را در هر یک از موارد زیر تعیین کنید.

الف $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$

ب $R = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (2, 1)\}$

ج $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1)\}$

$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 1), (4, 2)\}$

۶- ستاره های رابطه $R = \{(n, n) \mid n \neq 0\}$ را بر مجموعه $\mathbb{R}^2$ تعیین کنید.

۷- ثابت کنید

الف اگر R بازتابی باشد آنگاه R^c نیز چنین است.

ب اگر R بازتابی و تقارنی باشد آنگاه $R^n = R$ برای $n \in \mathbb{N}$.

ج اگر R متقارن باشد آنگاه R^c نیز چنین است.

د اگر R و S تقارنی باشند آنگاه $R \cap S$ تقارنی است.

۸- در درستی گزاره های زیر تحقیق کنید.

- ستاره تقارنی یک رابطه تقارنی، تقارنی است.

- ستاره تقارنی یک رابطه بازتابی، بازتابی است.

- ستاره بازتابی یک رابطه تقارنی، تقارنی است.

- ستاره تقارنی یک رابطه تقارنی، تقارنی است.

- ستاره تقارنی ستاره تقارنی یک رابطه، ستاره تقارنی آن نیز تقارنی است.

رابطه معادله

تعریف رابطه معادله

رابطه R را بر مجموعه A رابط معادله می‌نامیم هرگاه
 ۱. R بازتابی - تقارنی - متعدی باشد - عبارتی

$$\forall x \in A : x R x$$

$$\forall x, y \in A : x R y \Rightarrow y R x$$

$$\forall x, y, z \in A : x R y, y R z \Rightarrow x R z$$

مثال ۱ در معادله عددی روابط را زیر تحقیق کنید
 بر مجموعه اعداد صحیح

$$* x R y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$2 \leq 3, 3 \leq 2 \Rightarrow R \text{ تقارنی نیست} \Rightarrow R \text{ معادله نیست}$$

$$* x R y \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x = x \Rightarrow x R x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x R y \Rightarrow y R x$$

$$x R y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow$$

تساوی منطقی حاصل است جایابی دارد

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x R y, y R z \Rightarrow x R z$$

$$x R y, y R z \Rightarrow x = y, y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow x R z$$

$\Rightarrow R$ متعدی

$\Rightarrow R$ معادله است

$$* x R y \Leftrightarrow x = |y|$$

تا خود x ان x و منفی است که x و $|y|$ عدد صحیح در این

$$n = -1$$

$$-1R-1 \Rightarrow$$

را جمله شرکت ندارند پس

$$R \Rightarrow R \text{ بر } L \text{ نیست}$$

$$-1 = 1 - 1 \#$$

R هم از R نیست

$$* nRy \Leftrightarrow n+y > 2$$

$$n=0 \quad 0R0 \Rightarrow \text{نسبت} \quad R \Rightarrow R \text{ هم از } R \text{ نیست}$$

$$0+0 > 2 \#$$

$$* nRy \Leftrightarrow n|y : \forall n, y \in \mathbb{Z}$$

$$R \Rightarrow R \text{ تقارن نیست}$$

$$2|4, 4|2 \Rightarrow 2R4, 4R2 \Rightarrow R \text{ هم از } R \text{ نیست بر مجموعه اعداد صحیح}$$

$$* R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ مجموعه}$$

$$4R2, 2R4 \Rightarrow R \text{ تقارن نیست}$$

$$* R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4), (2,1), (3,2)\}$$

$$3R2, 2R1, 3R1 \Rightarrow R \text{ هم از } R \text{ نیست}$$

$$* \text{ بر مجموعه اعداد صحیح رابطه } \equiv_3 \text{ هم نشیمن - معیار 3 مفروض است}$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, mRn \Leftrightarrow m \equiv_3 n$$

$$(\Rightarrow) 3|m-n$$

$$\Leftrightarrow \text{بمیانده } n \text{ در } 3 \text{ برابر باشد}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, nRn \text{ ?}$$

$$nRn \equiv n \equiv_3 n \equiv 3|n-n$$

$$n-n=0=0 \times 3 \Rightarrow 3|n-n \Rightarrow n \equiv_3 n$$

$$R \text{ بر } L \text{ است}$$

$$\frac{110}{\forall n, y \in \mathbb{Z}, nRy \Rightarrow yRn}$$

$$\begin{aligned} nRy &\Rightarrow n \equiv_3 y \Rightarrow 3 \mid n-y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-y = 3 \times a \\ &\Rightarrow y-n = 3 \times \underbrace{(-a)}_b \\ &\Rightarrow 3 \mid y-n \\ &\Rightarrow y \equiv_3 n \\ &\Rightarrow \text{نقطة } R \end{aligned}$$

$$\forall n, y, z \in \mathbb{Z}, nRy, yRz \Rightarrow nRz$$

$$\begin{aligned} nRy &\Rightarrow n \equiv_3 y \Rightarrow 3 \mid n-y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-y = 3 \times a \\ yRz &\Rightarrow y \equiv_3 z \Rightarrow 3 \mid y-z \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-z = 3 \times b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (n-y) + (y-z) = 3 \times a + 3 \times b \Rightarrow n-z = 3 \times \underbrace{(a+b)}_c$$

$$\Rightarrow 3 \mid n-z \Rightarrow n \equiv_3 z \Rightarrow \text{نقطة } R$$

$$m \equiv_n p \equiv_m \text{ برای هر } m, p \text{ که رابطه هم‌ارزی است}$$

تعریف اقلایس هم‌ارزی یا ردیف هم‌ارزی

اگر R یک رابطه هم‌ارزی بر مجموعه A باشد، برای هر $n \in A$ ، ترانه $[n]$ که تمام عناصر x در A که xRn باشند را شامل می‌شود، $[n] = \{x \in A \mid xRn\}$ را می‌گویند. همچنین می‌توان نوشت $[n] = n/R = C_n = [n]_R$.

$$[n] = \{y \in A \mid yRn\} = \bar{n} = (n) = n/R = C_n = [n]_R$$

در واقع تمام هم‌ارزی‌ها نسبت به رابطه R (که مجموعه $R(n)$ است) متناهی و بر مجموعه اعداد حقیقی، رابطه R را صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall n, y \in \mathbb{R}: nRy \Leftrightarrow n-y = n^2 - y^2$$

$$\forall n \in \mathbb{R} : nRn ?$$

حل: اولا

$$n R n \equiv n - n \quad \text{aligns, n}$$

100

$$\Rightarrow \text{NRN} \Rightarrow \text{LRL}$$

$$\forall x, y \in R, xRy \stackrel{?}{\implies} yRx$$

$$nRy \Rightarrow n-y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \exists n-y=a$$

$$\Rightarrow y - x = -a \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y \mid R_n$$

$$\Rightarrow a_1, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\forall n, y, z \in \mathbb{R}, \quad nRy, yRz \stackrel{?}{\Rightarrow} nRz$$

$$nRy \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists z \text{ s.t. } n-y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \exists n-y=a \\ \exists b \in \mathbb{Z} \exists y-z=b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

شرط میں رابطہ کارا نظیر: نظیر ہم جمع کنیم داریم،

$$(x-y) + (y-z) = \underbrace{a+b}_c \Rightarrow x-z = c \in \mathbb{Z} \Rightarrow xRz$$

پس R بازتابی، متقارن، و بند است. در نتیجه هم ارزی است.

$$[I] = \{x \in \mathbb{R} \mid xR1\} = ?$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } n-1=a \Rightarrow$$

$n = \underbrace{a + 1}_{\text{عدد صحیح}} \Rightarrow n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [1] = \mathbb{Z}$

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\} = ?$$

$$nR\frac{1}{2} \Rightarrow n - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \rightarrow n - \frac{1}{2} = a \Rightarrow n = a + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

از آنجا که $\frac{1}{2}R = \frac{1}{2}$ پس $-\frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}]$

$$\frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \in \mathbb{Z}$$

توضیح: در حل این مثال از این مطلب گفتیم که در رابطه R اگر xRy آنگاه $[x] = [y]$ در مجاورت باشد. $[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \sqrt{2}$

مثال ۱ اثری محدود بر این رابطه ها نیست و نمی توانیم با S و R رابطه R_n را با دستور زیر تعریف کنیم.

$$xR_n y \Leftrightarrow n \leq x \text{ و } n \leq y \text{ و } x \text{ و } y \text{ هر دو اول باشند}$$

اولی بودن

اولی بودن R_n در S عمل است

تایید تعیین کنید $[0, 11]_{R_3}$

حل: اولی بودن x و y هر دو اول باشند n هر دو اول باشند n خودی

$$\forall n \in S, xR_n x$$

و اگر $xR_n y$ پس $n \leq x$ و $n \leq y$ و x و y هر دو اول باشند n و y هر دو اول باشند n و x هر دو اول باشند n

و همچنین اگر $xR_n y$ و $yR_n z$ آنگاه $xR_n z$

$$xR_n y \Rightarrow n \leq x \text{ و } n \leq y \text{ و } x \text{ و } y \text{ هر دو اول باشند}$$

$$yR_n z \Rightarrow n \leq y \text{ و } n \leq z \text{ و } y \text{ و } z \text{ هر دو اول باشند}$$

پس $xR_n z$

$$1) x=y, y=z \Rightarrow x=z \Rightarrow xR_n z \checkmark$$

$$2) x=y, y=z \Rightarrow x=z \Rightarrow xR_n z \checkmark$$

$$3) x=y, y=z \Rightarrow x=z \Rightarrow xR_n z \checkmark$$

$$4) \checkmark \Rightarrow R_n \text{ ترانزیتیو}$$

$$[011]_{R_3} = \{n \in S \mid nR_3 = 11\} = ?$$

تایید

$$nR_3 = 11 \Rightarrow n = 011$$

$$\Rightarrow n = 011, 0110, 01100, \dots$$

$$\begin{matrix} 01100 \\ 01101 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0111 \\ 01111 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow [011]_{R_3} = \{011, 0110, 01100, 011000, 0110000, 01100000, 011000000, \dots\}$$

مثال: مجموعه $R-1.1$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$nRy \iff \exists m \in \mathbb{Z} \exists \frac{n}{y} = 2^m$$

اولاً ثابت کنید R هم‌ارزی است.

تایید: $[1]$, $[2]$, $[\frac{1}{2}]$ و $[3]$ را مشخص کنید.

حل: اولاً،

$$\forall n \in R-1.1 : nRn ?$$

$$\frac{n}{n} = 1 = 2^0 \Rightarrow nRn \checkmark \Rightarrow R \text{ بازتابی است}$$

$$\forall n, y \in R-1.1, nRy \stackrel{?}{\Rightarrow} yRn$$

$$nRy \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \exists \frac{n}{y} = 2^m \Rightarrow \frac{y}{n} = 2^{-m} \xrightarrow{-m \in \mathbb{Z}} yRn \Rightarrow R \text{ متقارن است}$$

$$\forall n, y, z \in R-1.1, nRy, yRz \stackrel{?}{\Rightarrow} nRz$$

$$\left. \begin{matrix} nRy \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \exists \frac{n}{y} = 2^m \\ yRz \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \exists \frac{y}{z} = 2^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{n}{y} \times \frac{y}{z} = 2^m \times 2^n \Rightarrow$$

$$\frac{n}{z} = 2^{m+n} \xrightarrow{m+n \in \mathbb{Z}} nRz \Rightarrow R \text{ متعدی است}$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots \in R \Rightarrow R \text{ هم‌ارزی است}$$

$$[1] = \{n \in R-1.1 \mid nR1\}$$

تایید

Scanned by CamScanner

119
 $\forall (n, y), (z, t), (e, f) \in \mathbb{R}^2, (n, y) \sim (z, t), (z, t) \sim (e, f) \Rightarrow$
 $(n, y) \sim (e, f)$

$$\left. \begin{aligned} (n, y) \sim (z, t) &\Rightarrow n^2 + t^2 = y^2 + z^2 \\ (z, t) \sim (e, f) &\Rightarrow z^2 + f^2 = t^2 + e^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (n^2 + t^2) + z^2 + f^2 = y^2 + z^2 + t^2 + e^2$$

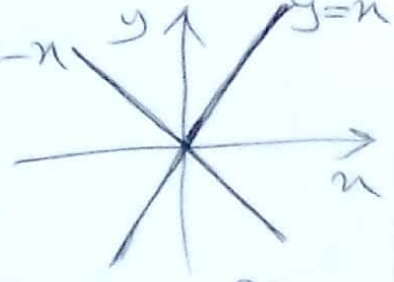
$$\Rightarrow n^2 + f^2 = y^2 + e^2 \Rightarrow (n, y) \sim (e, f) \Rightarrow \text{نقد ۲}$$

$\Rightarrow (n, y) \sim (e, f) \Rightarrow (n, y) \sim (0, 0) \sim (e, f) \sim (0, 0)$

$$[(0, 0)] = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (n, y) \sim (0, 0)\}$$

$$(n, y) \sim (0, 0) \Rightarrow n^2 + 0^2 = y^2 + 0^2 \Rightarrow n^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm n$$

این معادله نقاط مرتفع بر منحنی‌ها را نشان می‌دهد، منحنی‌ها را در دو ربع اول و سوم می‌بینیم.



فرض کنیم R رابطه هم‌ارزی در مجموعه A باشد در این صورت

$$[n] \neq \emptyset \quad (n \in A) \quad \text{برای هر } n \in A$$

$$\forall n, y \in A \quad \begin{cases} n R y \Rightarrow [n] = [y] \\ n R y \Rightarrow [n] \cap [y] = \emptyset \end{cases} \quad \text{حقیقتاً}$$

$$\forall n, y \in A \quad [n] \neq [y] \iff [n] \cap [y] = \emptyset \quad \text{حقیقتاً}$$

مثال ۱ در رابطه ۳ بر مجموعه اعداد صحیح (حقیقتاً سه فلاس هم‌ارزی)

مفاد وجود دارد زیرا

$$\forall n, y \in \mathbb{Z} \quad n \equiv y \pmod{3} \iff n - y \text{ بر ۳ بخش پذیر است}$$

از آنجا که در تقسیم عدد صحیح بر ۳ حقیقتاً سه میانبر ممکن است
 وجود دارد پس عدد صحیح در $[0]$ یا در $[1]$ یا در $[2]$ است.

تعریف: مجموعه خارج صفت نسبت یک رابطه

اگر R یک رابطه هم‌ارزی بر مجموعه A باشد در این صورت مجموعه صفت
مجموعه A نسبت به رابطه R (مجموعه خارج صفت A نسبت به R)
نسبت به R می‌باشد و با علامت A/R نشان می‌دهند.

$$A/R = \left\{ \frac{x}{R} \mid x \in A \right\} = \left\{ [x]_R \mid x \in A \right\} = \left\{ \bar{x} \mid x \in A \right\}$$

مثال: در رابطه هم‌ارزی $\equiv_3$ داریم:

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \} = \left\{ \frac{x}{\equiv_3} \mid x \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ [x]_{\equiv_3} \mid x \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \bar{x} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$$

مثال: روی مجموعه اعداد صحیح رابطه R به صورت زیر تعریف شده است

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a R b \Leftrightarrow a^2 - b^2 زوج است$$

نات کسیدار R هم‌ارزی است و $\mathbb{Z}/R$ مجموعه خارج صفت $\mathbb{Z}/R$ را مشخص کنید.

حل: اولاً: تمرین

ثانیاً: با توجه به تعریف R واضح است که $a^2 - b^2$ وقتی زوج است

که a و b هر دو زوج یا هر دو فرد باشند یا یکی a و b هر دو زوج یا هر دو فرد

$$\forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} \rightarrow \text{زوج است} \\ \rightarrow \text{فرد است} \end{cases}$$

$$a \sim n \mid n = [n] = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y R n \} \Rightarrow$$

$$y R n \Rightarrow y^2 - n^2 \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \ni y^2 - n^2 = 2a$$

$$\Rightarrow y^2 = n^2 + 2a \Rightarrow \begin{matrix} \text{زوج} & \text{زوج} & \text{زوج} \\ \hline \text{زوج} \end{matrix} \Rightarrow [n] = \mathbb{Z}_e$$

مجموعه اعداد صحیح زوج

۱۲۸
 $n \in \mathbb{N} \Rightarrow [n] = \{y \in \mathbb{Z} \mid yRn\}$

$yRn \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 - n^2 = 2b \Rightarrow y^2 = \underbrace{n^2}_{\text{زوج}} + \underbrace{2b}_{\text{زوج}} \Rightarrow y^2 \text{ عدد زوج}$

$\Rightarrow y \in \mathbb{Z}_0 \Rightarrow \mathbb{Z}/R = \{\mathbb{Z}_e, \mathbb{Z}_o\}$

$\mathbb{Z}_e$: مجموعه اعداد صحیح زوج
 $\mathbb{Z}_o$: مجموعه اعداد صحیح فرد
 even: زوج
 odd: فرد

توضیح:

در حالت کلی برای یافتن مجموعه خارج قسمت رابطه هم‌ارزی R بر روی A ، در صورتیکه A مشابه باشد ابتدا یک عضو A مانند n را در نظر گرفته و مدارک هم‌ارزی آن را مشخص می‌کنیم، اگر دیگر عضوی در A مانند n کار تمام است و در غیر این صورت عضوی دیگر در $A - R(n)$ را $\geq$ و واقع $A - n$ وجود دارد، یک عضو در $A - R(n)$ انتخاب کرده و فرایند را ادامه می‌دهیم تا دیگر عضوی باقی نماند. و اگر A مشابه باشد، ممکن است عملیات بالا به تعداد نامتناهی تکرار شود بنابراین عملیات فوق را تا جایی تکرار می‌کنیم که یک دستور مکرر یا قانون مشخص برای مدارک خاص هم‌ارزی حاصل شود.

مثال: در مجموعه $\mathbb{R}^2$ ، رابطه R با دستور زیر تعریف شده است:

$$\forall (n, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \mid (n, y) R (z, t) \Leftrightarrow n^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

اولاً اثبات کنید R یک رابطه هم‌ارزی است.

نایماً مجموعه خارج قسمت $\mathbb{R}^2$ را نسبت به این رابطه تعیین کنید.

حل: اولاً - عنوان ترین - خواننده دال‌گذاری شود.

نایماً اثر (a, b) یک نقطه را خواص $\mathbb{R}^2$ باشد

$$\overline{(a, b)}_R = \{ (a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\overline{(a, b)} = \{ (n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (n, y) R (a, b) \}$$

$$(x, y) \in R(a, b) \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

اگر $a^2 + b^2 = 0$ ، واضح است که $a = b = 0$ بنابراین

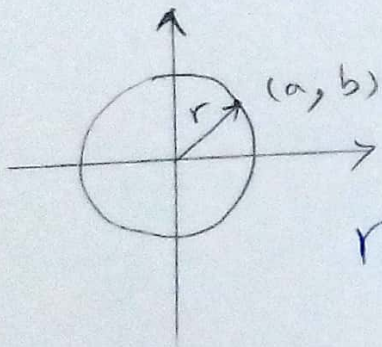
$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (0, 0) = \{(0, 0)\}$$

اگر $a^2 + b^2 > 0$ ، پس اگر قرار دهیم $a^2 + b^2 = r^2$ داریم

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (x, y) \text{ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع } r$$

قرار دارند که این دایره از نقطه (a, b) هم می‌گذرد

بنابراین (a, b) دایره‌ای به مرکز مبدأ است که از نقطه (a, b) می‌گذرد. $\mathbb{R}^2 / R$ یا در واقع مجموعهٔ کلاسهای هم‌ارزی در $\mathbb{R}^2$ نسبت به رابطهٔ R ، مجموعهٔ همهٔ دایره‌های به مرکز مبدأ می‌باشد.



$$\mathbb{R}^2 / R = \{C((0,0), r) \mid r \geq 0\}$$

که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r

تعریف افراز یک مجموعه
امراز ۱ Partition

۱۳۰
اگر S یک مجموعه باشد و $\mathcal{F}$ دسته‌ای باشد از زیرمجموعه‌های S باشد،
 $\mathcal{F}$ یک افراز مجموعه S نامیده می‌شود اگرگاه در این مورد شرط زیر باشد،
اولاً هیچ یک از اعضا $\mathcal{F}$ تهی نباشد.
ثانیاً اعضا $\mathcal{F}$ متمایز $\mathcal{F}$ ، دو به دو همزیران از هم باشند یا به عبارتی با هم
اشتراک نداشته باشند.
ثالثاً اجتماع همه اعضا $\mathcal{F}$ برابر مجموعه S باشد.
اگر $\mathcal{F}$ یک افراز مجموعه S باشد، هر یک از اعضا $\mathcal{F}$ را خانه‌های افراز یا
بلوک‌های افراز $\mathcal{F}$ می‌نامند.

مثال ۱ فرض $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، تعیین کنید کدام یک از دسته‌های
 $\mathcal{F}$ در زیر، افراز برای مجموعه S است.
الف $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
ب $\mathcal{F}_2 = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{5\}\}$
ج $\mathcal{F}_3 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$
د $\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$
ه $\mathcal{F}_5 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$

حل الف $\mathcal{F}_1$ افراز نیست زیرا شرط دوم (همزیران بودن) بین همزیران بودن
اعضای افراز از هم را ندارد.
ب افراز است.
ج افراز است.
د $\mathcal{F}_4$ افراز نیست زیرا شرط اول (همزیران بودن) خانه‌های افراز
را ندارد.
ه $\mathcal{F}_5$ افراز نیست زیرا شرط سوم (افراز را ندارد زیرا به اجتماع
اعضای $\mathcal{F}$ خانه‌های $\mathcal{F}$ برابر مجموعه اصل باشد که نیست.
 $\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} \neq S$

قضیه: اگر R یک رابطه هم‌ارزی بر مجموعه A باشد در این صورت مجموعه خارج قسمت A/R یک افزاینده مجموعه A است.
(به عبارتی هر فردی هم‌ارزی یک خانه افزاینده است).

مثال: اگر F یک افزاینده مجموعه A باشد در این صورت به کمک آن می‌توان یک رابطه هم‌ارزی روی A به شکل زیر تعریف کرد:

$$\forall x, y \in A : x R y \iff \exists x \in F \exists n \in x, y \in x$$

به عبارتی هر دو عضو A به هم در رابطه اند اگر و تنها اگر هر دو در یک خانه افزاینده قرار داشته باشند.

حل: برای هر $n \in A$ ، با بر شرط سوم افزاینده، همان‌یک خانه F وجود دارد که n در این خانه باشد یعنی
مانند x

$$\forall n \in A, \exists x \in F \exists n \in x$$

خود توان

$$n \in A \Rightarrow n \in A, n \in A$$

$$\Rightarrow n R n \Rightarrow \text{رابطه بازتابی است}$$

$$\forall x, y \in A : x R y \stackrel{?}{\Rightarrow} y R x$$

$$x R y \Rightarrow \exists x \in F \exists n \in x, y \in x \Rightarrow \exists x \in F \exists y \in x, n \in x$$

(خاصیت جایابی ترتیب عطف)

$$\Rightarrow y R n \Rightarrow \text{رابطه بازتابی است}$$

$$\forall x, y, z \in A : x R y, y R z \stackrel{?}{\Rightarrow} x R z$$

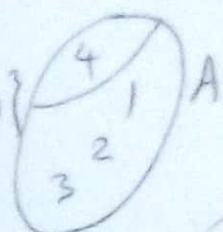
$$x R y \Rightarrow \exists x \in F \exists n \in x, y \in x \quad ①$$

$$\frac{122}{yRz \Rightarrow \exists y \in F \exists y \in Y, z \in Y} \textcircled{5}$$

با شرط درم افراد با به خانه افراد، همزمان از هم هستند
 $X \cap Y = \emptyset$ یا $X=Y$ (صحیح) $X \cap Y \neq \emptyset$ پس $X=Y$ با رشت
 $x \in X, z \in X \Rightarrow xRz \Rightarrow$ R در X هم ارزش است.

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ یک افراد A با
 مطلوب است رابط هم ارزشی حاصل از افراد F بر مجموعه A .

حل ۱

$$R = \{(4, 4), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)\}$$


و واضح است که در این حالت هر دو هم ارزشی (تفکیک) خانه افراد
 در مثال فوق می بینیم که

$$A_R = \{[4], [1], [2], [3]\} \text{ و } [1] = [2] = [3] = \{1, 2, 3\} \text{ و } [4] = \{4\}$$

$$F = \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}$$

و در نتیجه مجموعه خارج صفت نسبت به این رابط، (عنا) افراد است.

نتیجه: هر رابط هم ارزشی مرکب مجموعه، منحصر به یک افراد می شود
 (مجموعه خارج صفت آن) یک افراد است و در عکس هر افراد
 یک مجموعه، یک رابط هم ارزشی مرکب مجموعه ایجاد می کند.

مثال: ما فرض کنیم

$$A = \{(5, 1), (2, 1), (3, -1), (-1, -1), (-2, -4), (-3, -9), (-4, -16), (2, 4), (4, 16)\}$$

بر مجموعه A رابط R را طبق دستور زیر تعریف می کنیم.

$$\forall (x, y), (z, t) \in A: (x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x + y = z + t$$

اولاً، ثابت کنید R هم‌ارزی است.

ثانیاً، افراز حاصل از رابطه R را در A بنویسید.

مجموعه خارج قسمت

حل اولاً اثبات

ثانیاً، افراز حاصل از رابطه R در A است که هر عضو A یک مقدار هم‌ارز است، بنابراین مقادیر A را به صورت $A/R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A\}$ تعیین کنیم.

$$[-4, -20] = \{(x, y) \in A \mid (x, y) R (-4, -20)\}$$

$$(x, y) R (-4, -20) \Rightarrow x \times (-20) = y \times (-4) \Rightarrow y = 5x \Rightarrow$$

$$[-4, -20] = \{(-4, -20), (1, 5), (2, 10)\}$$

$$[-3, -9] = \{(x, y) \in A \mid (x, y) R (-3, -9)\}$$

$$(x, y) R (-3, -9) \Rightarrow x \times (-9) = y \times (-3) \Rightarrow y = 3x \Rightarrow$$

$$[-3, -9] = \{(-3, -9), (1, 3)\}$$

$$[-2, -4] = \{(x, y) \in A \mid (x, y) R (-2, -4)\}$$

$$(x, y) R (-2, -4) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow [-2, -4] =$$

$$\{(-2, -4), (1, 2)\}$$

و همچنین بطور مشابه

$$[-1, -1] = \{(-1, -1)\}, [2, 14] = \{(2, 14)\}$$

بنابراین

$$T = A/R = \{ \{(-4, -20), (1, 5), (2, 10)\}, \{(-3, -9), (-1, -3)\},$$

$$\{(-2, -4), (1, 2)\}, \{(-1, -1)\}, \{(2, 14)\} \}$$

۱۳۴
 مثال: تعیین کنید ترکیب مجموع ۴ عنوان چند رابطه هم ارزش می توان تعریف کرد.

حل: با توجه به قضیه اخیر، ارتباط دوسویه بین رابطه ها هم ارزش می رود.
 یک مجموعه و افزایش ها (مجموعه وجود دارد) به عبارتی هر رابطه هم ارزش
 معبره یک افزایش می شود و برعکس هر افزایش یک رابطه هم ارزش ایجاد می کند،
 بنابراین تعداد رابطه ها هم ارزش متناظر مجموعه ۴ عنوان مثلاً A ها،
 تعداد افزایش ها این مجموعه است.

اگر P یک افزایش مجموعه A باشد، از آنجا که هر عنوان P یک زیر مجموعه نامی
 است پس هر عنوان P حداقل یک عنوان حداکثر ۴ عنوان دارد، بنابراین
 حالت های زیر برای P ممکن است

$$P = \{ A \}$$

تعداد = ۱ حالت

$$P = \{ x_1, x_2 \}$$

تعداد = $\binom{4}{1}$ حالت

سه عنوان
 یک عنوان

$$P = \{ x_1, x_2 \}$$

تعداد = $\binom{4}{2}$ حالت

دو عنوان
 یک عنوان

$$P = \{ x_1, x_2, x_3 \}$$

تعداد = $\binom{4}{2}$ حالت

دو عنوان
 یک عنوان

$$P = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$$

۱ حالت

x_i ها یک عنوان

$$1 + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{2} + 1 = 18$$

بنابراین حداکثر ۱۸ رابطه هم ارزش متناظر یک مجموعه ۴ عنوان
 می توان تعریف کرد.

۱- ثابت کنید روابط زیر بر مجموعه $\mathbb{R}^2$ ، هم‌ارز است:

الف، $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, (a,b) R (c,d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

ب، $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2: (a,b) R (c,d) \iff a+b = c+d$

ج، $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2: (a,b) R (c,d) \iff ab = cd$

د، $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2: (a,b) R (c,d) \iff$

فاصله نقطه (a,b) تا نقطه P (یک نقطه ثابت در صفحه $\mathbb{R}^2$)
فاصله نقطه (c,d) تا نقطه P یکسان است.

$P|n$.

در همه موارد، تعبیر هندسی کلاسها، هم‌ارز را ارائه کنید.

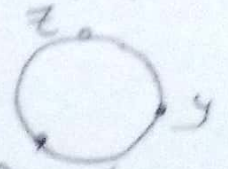
۲- اگر R و S دو رابطه بر مجموعه A باشند صمیم باشند بطوریکه

$\forall n \in \mathbb{Z}, nRy \iff n \equiv y$
 $nSy \iff n \equiv y$

حل کنید: است $(R \cup S)^\sim$ و $A/(R \cup S)^\sim$.

۳- رابطه R را بر مجموعه A مدور یا چرخشی و ناصحی قرار دهید.

$\forall n, y, z \in A, nRy, yRz \implies zRn$



ثابت کنید رابطه R هم‌ارز است اگر و تنها اگر مدور باشد.

۴- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ روابط زیر موجود است،

$R = \{(1,2), (1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (5,6), (6,5)\}$

$S = \{(1,2), (1,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,6), (6,4)\}$

کلاسها، هم‌ارز را تعیین کنید.

۴- اثر یک رابطه بازتابی و تقارنی بر مجموعه A باشد، رابطه S صورت زیر بر A تعریف شده باشد،

$$\forall a, b \in A, a \sim b \iff aRb, bRa$$

تاثیر کنید S هم‌ارزی است

۵- اثر یک رابطه بازتابی و تقارنی بر مجموعه A باشد، تاثیر کنید R هم‌ارزی است
اثر و تنها اثر

$$\forall a, b \in A : aRb, aRc \Rightarrow bRc$$

۷- اثر یک رابطه تقارنی و تقارنی و تقارنی بر مجموعه A باشد، تاثیر کنید

$$\forall x \in A, \exists y \in A \ni xRy$$

تاثیر کنید R هم‌ارزی است.

۸- در زبان برنامه نویسی C++ ساختار Union یعنی دو یا چند متغیر فضای حافظه مشترک داشته باشند برای مثال

union

```
{
    int a;
    int b;
    int c;
};
```

اگر a و b در یک union باشند آیا R هم‌ارزی است؟

۹- اثر S مجموعه هم‌رشته‌ها با طول ۸ باشد اگر هم‌رشته‌ها مجموعه‌ها زیر یک افزاینده S می‌باشد.

الف) دسته‌های هم‌رشته‌ها با طول ۱ آغاز می‌شوند و رشته‌ها بین ۱ تا ۱۰۰ آغاز می‌شوند و مجموعه هم‌رشته‌ها بین ۱ تا ۱۰۰ آغاز می‌شوند.

ب) دسته‌های هم‌رشته‌ها با طول ۱۱۱ ختم می‌شوند و مجموعه هم‌رشته‌ها با طول ۱۱۰ ختم می‌شوند و مجموعه

همه رسته‌ها را می‌بینیم که $\leq$ حتمی می‌شود

۱۰- با فرض $A = \{1, 2, 3, 4\}$ روی A^2 رابطه R را چنین تعریف می‌کنیم:
 $\forall (x, y), (z, t) \in A^2, (x, y) R (z, t) \iff x + y = z + t$
 تعیین کنید افزاینده حاصل از رابطه R روی A^2 چند معنودار دارد، چقدر عبارتی
 چند مقلک هم‌ارز می‌باشد برای A^2 نسبت به رابطه R معنودار است.

۱۱- اثر R و S دو رابطه هم‌ارزی باشند A را $\{1, 2, 3, 4\}$ در نظر بگیرید تعیین کنید
 کدامیک از زیر مجموعه‌ها صحیح است.

الف $R \cup S$ هم‌ارزی است.

ب $R \cap S$ " "

ج $R \circ S$ " "

۱۲- تعیین کنید برای یک مجموعه M هست معنوی، حداقل چند رابطه هم‌ارزی معنوی
 می‌توان تعریف کرد بطوریکه حداقل دارای پنج مقلک هم‌ارزی متفاوت
 باشند.

۱۳- تعیین کنید برای مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چند رابطه هم‌ارزی معنوی باجه اول ۲ مقلک
 هم‌ارزی می‌توان تعریف کرد.

اگر R یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B باشد

(A n عضو و B m عضو و R رابطه ای از A به B)

این رابطه را می توان به جایی خالی زده های مرتب توسط یک

ماتریس $M_{n \times m}$ را به دست آورد و اگر ماتریس معکوس یا ماتریس

معکوس نامیده می شود بصورت زیر نمایش داده شود.

$$M = (m_{ij})_{n \times m} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R b_j \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

این ماتریس معکوس

other ways

عین سایر حالت ها می باشد.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_m\}$$

صحنه ماتریس می تواند یک جانشین برای نمایش رابطه ای از A به B باشد بطور مثال اگر

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ و } B = \{0, 5, 4, 3, 7\}$$

$$R = \{(1, 7), (1, 4), (3, 2), (4, 7)\}$$

یک ماتریس 4×5 (تعداد سطرها برابر تعداد اعضا A و تعداد

ستون ها برابر تعداد اعضا B) به درج می شود زیرا است.

$$M_{4 \times 5} = \begin{matrix} & 0 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مثال: فرض $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

$$M_{3 \times 5} = \begin{matrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_4), (a_3, b_5), (a_3, b_5)\}$$

مثال ۱: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و R رابطه زیر روی A باشد

$$x R y \iff x + y \leq 5$$

ماتریس نظیر این رابطه عبارت است از یک ماتریس $M_{4 \times 4}$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

توضیح:

الف: در واقع رابطه R یک ماتریس صفی است، یک ارتباط دو طرفه دارند یعنی

اگر A مجموعه n عضو و B مجموعه m عضو و $M_{n \times m}$ یک ماتریس صفی باشد در این صورت M نمایشگر یک رابطه از A به B با ماتریس M است و برعکس هر رابطه از مجموعه A به مجموعه B m عضو را می توان توسط یک ماتریس $M_{n \times m}$ مؤلفه های صفی نمایش داد.

ب: اجزای ماتریس های صفی، همانند تیراژه ها می توان ترکیب صفی و ترکیب فصل به شرح زیر تعریف کرد.

اگر $M_{n \times m}$ و $M'_{n \times m}$ دو ماتریس صفی (ماتریس بولی) باشند، تعریف می کنیم:

$$M \wedge M' = (C_{ij})_{n \times m}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij} = m'_{ij} = 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

ترکیب صفی: باشند
"عقل و دست"

$$M \vee M' = (C_{ij})_{n \times m}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij} = 1 \vee m'_{ij} = 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

و همچنین اگر $M_{n \times m}$ و $M'_{m \times t}$ دو ماتریس صفی باشند، ضرب این دو ماتریس (ضرب نقطه ای) - صورت زیر تعریف می شود:

۱۳۰
 $M \odot M' = (c_{ij})$
 $n \times t$

$$c_{ij} = (m_{i1} \wedge m'_{1j}) \vee (m_{i2} \wedge m'_{2j}) \vee \dots \vee (m_{in} \wedge m'_{nj})$$

$$= \bigvee_{k=1}^m (m_{ik} \wedge m'_{kj})$$

مثال دیگر
 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ معلوم است
 $M \odot M'$, $M \vee M'$, $M \wedge M'$

حل ۱
 $M \wedge M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$M \vee M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M \odot M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2×3 2×3

واضح است که برای ضرب M و M' به تعداد ستونهای M و سطرهاهای M' نیاز باشد که درجهات فوق جفتین نیست، برای ممکن شدن این کار (توان) - ماتریس M' یک سطر (یا ستون) صفر اضافه کردیم

$$M \odot M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [?]_{2 \times 3}$$

2×3 3×3

$$\begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

2×3

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال دیگر
 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

حل

$$(A \odot B) \odot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} =$$

برای امضا پذیرنده ضرب،
 یک ستون به اثر $A \odot B$ اضافه شود یعنی ستون کامل صفر،
 $A \odot B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

این از رابطه توسط ماتریس، داریم احوال بین رابطه
 را نیز توسط ماتریس علامه می‌کنیم.

اگر M ماتریس رابطه R و M' ماتریس رابطه S باشد،
 واضح است که

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$$

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$$

$$M_{R^c} = (c_{ij})_{i,j} \quad c_{ij} = \begin{cases} 0 & m_{ij} = 1 \\ 1 & m_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$M_{R-S} = M_{R \cap S^c} = M_R \wedge M_{S^c} \quad , \quad M_{R \Delta S} = M_{(R-S)} \vee M_{(S-R)}$$

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T \quad (\text{ماتریس معکوس})$$

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

مثال: فرض $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است
 ماتریس معکوس و رابطه $R-S$ ، R^c ، R^{-1} ، $R \cap S$ و $R \cup S$

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{حل ۱}$$

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\bar{R}} = (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R-S} = M_{R \cap S^c} = M_R \wedge M_{S^c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \Delta S} = M_{(R-S) \cup (S-R)} = M_{R-S} \vee M_{S-R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{S-R} = M_{S \cap R^c} = M_S \wedge M_{R^c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عمیقاً به خواص بازتابی، ضد بازتابی، و تقارن و ضد تقارن و غیره را به کمک مفاهین ماتریس در اینجا به شما معرفی می‌کنیم. اگر M و M' دو ماتریس $n \times n$ باشند، آن‌ها نیز به نسبت $M' < M$ قرار می‌گیرد.

$$\forall i, j: m_{ij} \leq m'_{ij} \quad (\text{در خواص کوچکتر یا مساوی})$$

بنابراین اگر $M_{n \times n}$ ماتریس نظیر رابطه R باشد در این صورت

$$R \text{ بازتابی است} \iff I_n \leq M \quad (\text{به عبارتی همه عناصر قطر اصلی یک باشد})$$

$$I_n \text{ ماتریس } n \times n \text{ که همه عناصر آن صفر است به جز قطر اصلی که همه عناصر آن یک است.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} = I_n$$

R ضد یازتابی است $\Leftrightarrow$ همه عناصر قطر اصلی برابر صفر باشد.

$M = M^T \Leftrightarrow R$ تقارنی است

$MM^T < \frac{I}{n} \Leftrightarrow R$ ضد تقارنی است

$M_{R^2} < M_R \Leftrightarrow R$ تعدیل است

مثال اخوان یازتابی - ضد یازتابی - تقارنی - ضد تقارنی و تعدیل را (چک کنید) مائریس در روابط زیر تحقیق کنید

$$*M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ همه عناصر قطر اصلی برابر یک است $\Rightarrow R$ یازتابی است $\Rightarrow R$ ضد یازتابی نیست

$M = M^T \Rightarrow R$ تقارنی است $\Rightarrow R$ ضد تقارنی نیست $\Rightarrow R$ تعدیل است

$$M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_R \Rightarrow R$$

$$*M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow R$ یازتابی و ضد یازتابی است $\Rightarrow$ همه عناصر قطر اصلی برابر صفر است و تمام عناصر دیگر برابر یک است $\Rightarrow$ تقارنی نیست

$$(M_S)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq M_S \Rightarrow$$

$$(M_S) \wedge (M_S)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} < \frac{I_3}{3}$$

پس ضد تقارنی نیست

$$M_{S^2} = M_S \circ M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} < M_S$$

پس تعدیل نیست

$$R_{nn} = RU\Delta_A$$

$$\Rightarrow M_{R_{nn}} = MV I_n \quad (\text{مقدار عناصر تغییرات اصل را یک می کنیم})$$

$$\bar{R}_{ny} = RU\bar{R}^1$$

$$\Rightarrow M_{R_{ny}} = MV M^T$$

$$R = \bigoplus_{i=1}^n R^i$$

$$\Rightarrow M_{R^\infty} = M_R VM_{R^2} V \dots VM_{R^n} = \bigoplus_{i=1}^n M_{R^i}$$

واضح است که $M_{R^\infty} = M_{R^\infty} V I_n$

مثال ماتریس ستارها را به زیر را بدست آورید.

$$* M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

ماتریس M را به ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ برای مربع شدن تغییر می دهیم و سپس ستارها را یک می کنیم.

$$M_{R_{nn}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{R_{ny}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^\infty} = M_R VM_{R^2} VM_{R^3}$$

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R \Rightarrow R^2 = R \Rightarrow R^3 = R^2 = R$$

$$\Rightarrow M_{R^3} = M_{R^2} = M_R \Rightarrow M_{R^\infty} = M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R \text{ ختم می شود}$$

$$* M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

این ماتریس را برای مربع شدن به ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ تغییر می دهیم که به این طریق ماتریس کامل می شود.

$$M_{R_{nn}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{R_{ny}} = MVM^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^\infty} = M_R VM_{R^2} VM_{R^3}$$

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_R \Rightarrow R^2 = R \Rightarrow M_{R^\infty} = M_R$$

$$M_{R^2} = M_R \Rightarrow M_{R^3} = M_{R^2} = M_R \Rightarrow M_{R^\infty} = M_R$$

محاسبه برای یافتن ماتریس ستاره‌های رابط و در نتیجه یافتن ستاره‌ها
یک رابط از یک روی سرعت به نام الگوریتم وارshall نیز می‌توانیم گرفت.

الگوریتم وارshall به کمک الگوریتم ستاره‌های رابط و رابط‌ها را مشخص کنیم.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ما می‌توانیم به این ماتریس متون مربعی است اما می‌خواهیم به تغییر اندازه به 3×3 در این الگوریتم در هر مرحله عمل می‌کنیم.

مرحله اول M را به یک ماتریس W_0 تبدیل می‌کنیم.

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در مجموع نام C و r مشخص می‌کنیم.

در مجموع C شماره سطرها را برای یک رابط در این ماتریس مشخص می‌کنیم و در مجموع r شماره ستون‌ها را.

و سپس از چهار جهت $C \times r$ را تعیین کرده و در این عمل متناظر آن را به یک تبدیل می‌کنیم و در آخر ماتریس جدید را W_1 می‌نامیم و به مرحله دوم می‌رویم.

$$C \times r = \{(3, 2)\} \Rightarrow W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مرحله دوم: همین عملیات را برای سطرها و ستون دوم انجام می‌دهیم.

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مؤلفه $(3, 3)$ خود را یک عدد است پس نیاز به تغییر نداشته.

$$C \times r = \{(3, 1), (3, 3)\} \Rightarrow W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مرحله سوم: اگر این عملیات را برای سطرها و ستون سوم نیز می‌کنیم.

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \times r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$$\Rightarrow W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{R^\infty}$$

یعنی R^∞ برابر A^2 یعنی همه زدها صفت $A \times A$ است

$$* M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مرحله اول ۱

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow C \times R = \{1, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2)\}$
مؤلفه ها تغییر جای درج با ۸ یا ۲ یا ۱ تغییر کند یا توسط مؤلفه های W_0 مقفول
تغییر یا ۱ یا ۲ یا ۳ شود یعنی،

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مرحله دوم ۱

$$C \times R = \{1, 3\} \times \{3\} = \{(1,3), (3,3)\} \Rightarrow$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

یعنی همه مؤلفه ها

$$C \times R = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{R^\infty}$$

$$* M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مرحله اول ۱

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی است 4×4 پس احتیاج به تغییر ابعاد ندارد و الگوریتم وارم ل در ۴ مرحله عمل میکند.

$$C \times R = \{1, 4\} \times \{1, 3, 4\} = \{(1,1), (1,3), (1,4), (4,1), (4,3), (4,4)\}$$

این مؤلفه ها به تغییر کنند سایر مؤلفه ها یک است.

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مرحله دوم

$$C \times R = \{2, 3\} \times \{2, 3, 4\} = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

مرحله سوم

$$\Rightarrow W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \times R = \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4\} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

$$\Rightarrow W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس در این مورد هم بطور خاص مانده دو مورد دیگر عمل مؤلفه عایب است
یک تغییر کند باین

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ ابتدا ماتریس را، اعضا کم کرد یک سطر و یک ستون از ماتریس حذف کرد و باین تغییر در عمل
مرحله اول

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C \times R = \{1\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3)\} \Rightarrow$$

مرحله دوم

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C \times R = \{2\} \times \{2, 3\} = \{(2, 2), (2, 3)\} \Rightarrow$$

مرحله سوم

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C \times R = \{1, 2\} \times \emptyset = \emptyset \Rightarrow W_3 = W_2$$

در این مرحله برای این مورد $C \times R = \emptyset$ پس در این مرحله عمل مؤلفه عایب است
نتیجه این مرحله عمل مؤلفه عایب است پس

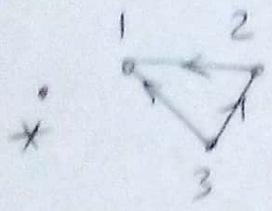
$$M_{R^\infty} = W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{R^\infty} = M_R \Rightarrow R \text{ قد } R \Rightarrow R^\infty = R$$

عناوین از جاهای مرتب رابط به کمک رسم گراف

در این روش اثر R رابط این بر مجموعه A است، نظیر و عنوان A یک نقطه در صفحه رسم می‌کنیم و آن را یک رأس گراف می‌نامیم و اگر nR نقطه مربوط n را توسط یک خط راست به A وصل کرده و یک نقش درون خط به سمت A می‌کشیم. نقطه حاصل را یک رأس گراف می‌نامیم، بنابراین نظیر و از ج مرتب یک یال در صفحه رسم می‌کنیم.

مثال: با فرض $A = \{1, 2, 3\}$ ، $R = \{(n, r) \in A^2 \mid n > r\}$ ، گراف مربوط این رابط را رسم کنید.

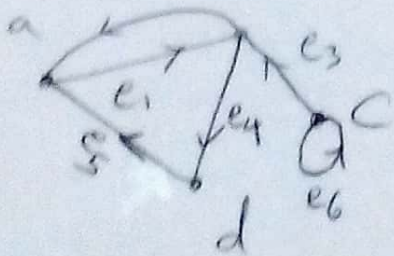


$$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

حل ۱

R به مرتب دارد، نظیر و از ج یک یال رسم کردیم و چهار رأس برای گراف در نظر گرفته ایم.

عمیق‌ترین در گراف، هر دو نام شامل تعدادی از رأس‌های یال‌های گراف را یک مسیر گراف می‌نامیم، بطور مثال در گراف زیر، مثال $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6$



یک مسیر از c به a طول ۳ می‌باشد که در واقع منظور از طول مسیر تعداد یال‌ها است

که در هر مسیر می‌تواند به هر دو رأس این مسیر را می‌توانیم به صورت زیر هم نشان دهیم.

$$a \xrightarrow{e_1} b \xrightarrow{e_2} c \xrightarrow{e_3} d \xrightarrow{e_4} e \xrightarrow{e_5} f \xrightarrow{e_6} a$$

قابل ذکر است که اگر رأس ابتدایی مسیر را رأس انتهایی مسیر بگیریم، آن را دور می‌نامیم مانند

$$a b d a b$$

$$a \xrightarrow{e_1} b \xrightarrow{e_2} c \xrightarrow{e_3} d \xrightarrow{e_4} e \xrightarrow{e_5} f \xrightarrow{e_6} a$$

مسیر $a b d a b$ یک دور طول ۳ است، در واقع طول مسیر برابر تعداد یال‌ها می‌شود. به عنوان مثال اگر طول یک دور برابر یک باشد آن را طول می‌نامند مانند $e_1 e_2 e_3$ یا $e_6 e_5 e_4$

۱۴۹
 معمولاً در هر گراف مجموع عمده‌ها (یا حرف V) است و در هر گراف مجموع عمده‌ها (یا حرف E) است

Vertex: رأس $V = \{a, b, c, d\}$
 Edge: لبه $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

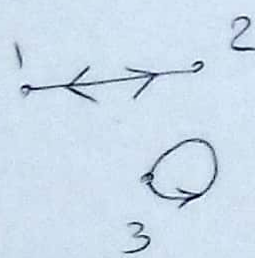
قابل ذکر است که در یک گراف جهت دار D_R ، مسیر از مبدأ رأس a به رأس b طول n به صورت یک زیرنمایش داده می‌شود.

$$(a, n_1), (n_1, n_2), \dots, (n_{n-1}, b)$$

$$a \rightarrow n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow n_3 \rightarrow \dots \rightarrow n_{n-1} \rightarrow b$$

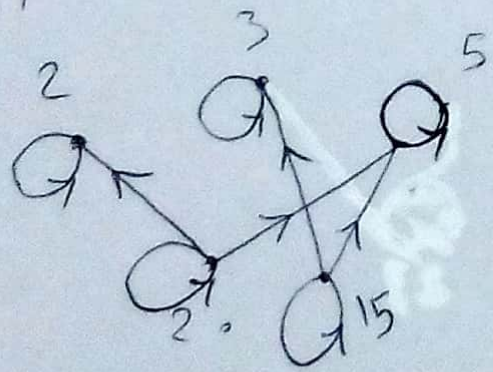
این مسیر $n+1$ رأس و n لبه را شامل است.

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ ، گراف R را رسم کنید.



حل: این گراف سه لبه دارد که یک لبه آ (خود) است
 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$
 طوقه

مثال: اگر $A = \{2, 3, 5, 15, 20\}$ و $R = \{(n, j) \in A^2 \mid n \mid j\}$ ، گراف مربوط به R را رسم کنید.



حل:

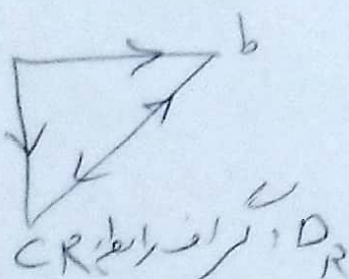
واضح است که، با توجه به مشخصات زیر، گراف یک رابطه می تواند به خواص بازتابی، ضد بازتابی، تقارنی، ضد تقارنی و نقیصه رابطه به شکل زیر برسد.

- R بازتابی است $\Leftrightarrow$ هر رأس گراف دارای طوقه باشد.
- R ضد بازتابی است $\Leftrightarrow$ هیچ رأس گراف طوقه نداشته باشد.
- R تقارنی است $\Leftrightarrow$ هم دایره داران مثلث دو طرفه باشد.
- R ضد تقارنی است $\Leftrightarrow$ صرف نظر از طوقه ها، هیچ یالی دو طرفه نباشد.
- R نقیصه است $\Leftrightarrow$ برای هر دو رأس گراف، اگر مسیر به طول $1 < n$ موجود است حتماً یک یال مستقیم هم موجود باشد.

مثال: اگر گراف زیر مربوط به رابطه R بر مجموعه $A = \{a, b, c\}$ باشد

با توجه به خواص رابطه R تحقیق کنید.

D_R :



حل ۱: هیچ رأس طوقه ندارد پس بازتابی نیست و ضد بازتابی است.

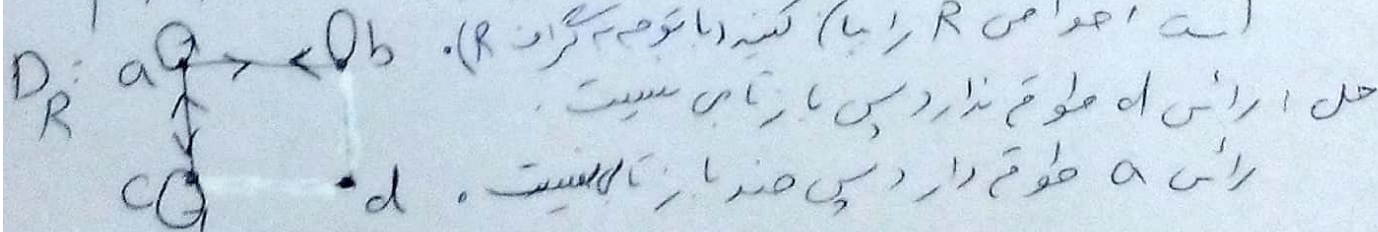
یال $a \rightarrow b$ یک طرفه است پس تقارنی نیست.

یال $b \rightarrow c$ دو طرفه است پس ضد تقارنی نیست.

از a تا c یک مسیر به طول ۲ وجود دارد.

ولی یک یال مستقیم از a تا c هم وجود دارد پس یک مسیر به طول ۱ هم وجود دارد. پس نقیصه نیست.

مثال ۲: اگر گراف D_R در زیر مربوط به رابطه R بر مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ باشد



این خواص R را با (کینه یا توجه به گراف R) حل ۱ را می توانیم به دست آوریم.

رأس a طوقه دارد پس بازتابی نیست.

رأس c طوقه ندارد پس ضد بازتابی نیست.

عمده یا با دو طرفه اند پس تقارن است و ضد تقارن نیست

مسیر $a \rightarrow c \rightarrow a$ موجود است ولی یا مستقیم از $a \rightarrow c$ وجود ندارد پس تقارن نیست

همچنین به کمک گراف می توان گراف سیمارهای بازتابی و تقارن و تقارن یک را به راحتی یافت

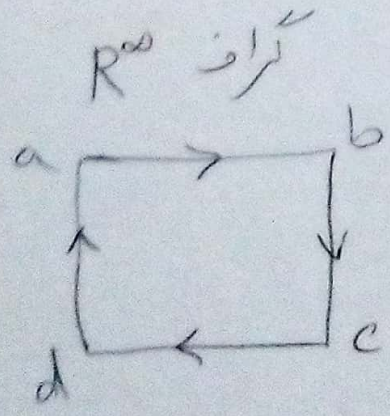
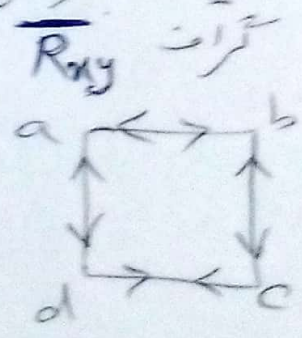
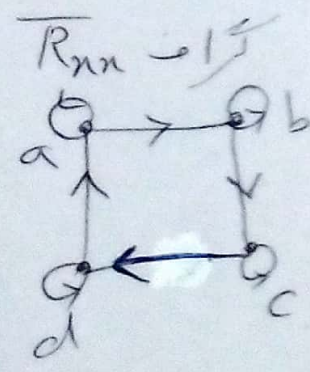
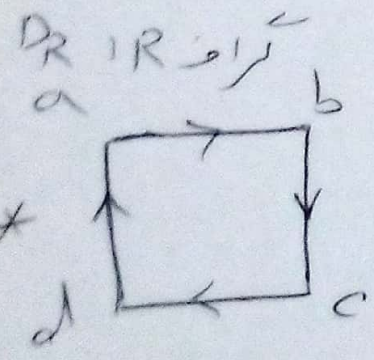
* برای یافتن گراف سیمار بازتابی، کافی است برای عمده رأس ها، طوقه رسم شود

* برای یافتن گراف سیمار تقارن، کافی است عمده یا با (صرف نظر از طوقه ها) دو طرفه شود

* برای یافتن گراف سیمار تقارن، کافی است اگر مسیر به طول برابر از ۱ بین دو رأس وجود دارد یک یا مستقیم هم رسم شود و در صورت گنیم که با

افزایش عدد عمده یا با مستقیم یا به یک یا مستقیم دیگر هم برای تقارن بودن را به کار می رود

مثال اطمینان سیمارهای گرافها را برآرسم کنید



موجود است

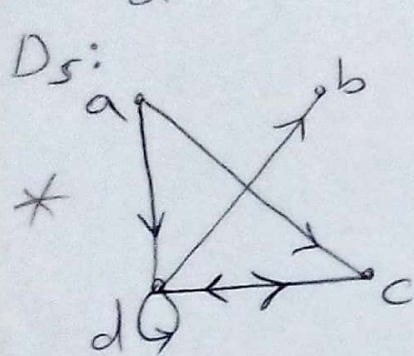
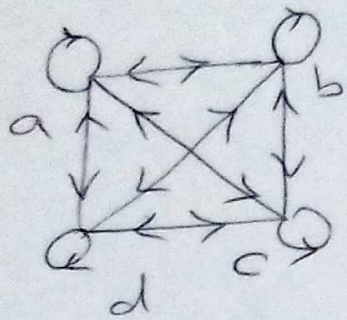
$a \rightarrow b \rightarrow c \Rightarrow a \rightarrow c$
 $c \rightarrow d \rightarrow a \Rightarrow c \rightarrow a$
 $b \rightarrow c \rightarrow d \Rightarrow b \rightarrow d$
 $d \rightarrow a \rightarrow b \Rightarrow d \rightarrow b$

$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a \Rightarrow a \rightarrow a$
 $b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow b \Rightarrow b \rightarrow b$
 $c \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow c \Rightarrow c \rightarrow c$
 $d \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \Rightarrow d \rightarrow d$

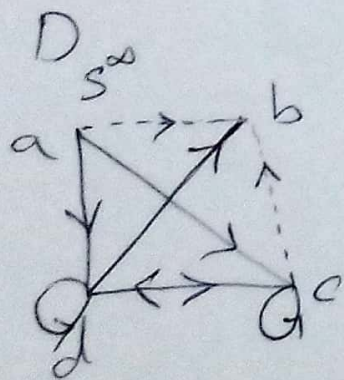
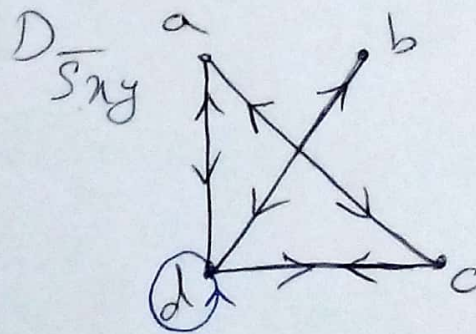
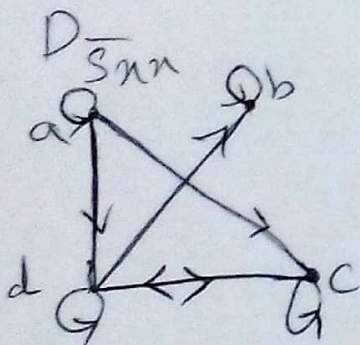
مجموعه ها را طوقه ها

$$\begin{array}{lcl}
 b \xrightarrow{105} d \rightarrow a & \Rightarrow & b \rightarrow a \\
 c \rightarrow d \rightarrow b & \Rightarrow & c \rightarrow b \\
 d \rightarrow a \rightarrow c & \Rightarrow & d \rightarrow c \\
 a \rightarrow c \rightarrow d & \Rightarrow & a \rightarrow d
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \text{امتیاز شود} \\ \text{جهت مخالف باشد} \\ \text{موجود} \end{array} \right\}$$

بنابرین سبب رتبه این گراف تمام یالها ممکن است بین



گراف اصل رابطه S



یال موجود	امتیاز شود
$a \rightarrow d \rightarrow b \Rightarrow$	$a \rightarrow b$
$c \rightarrow d \rightarrow c \Rightarrow$	$c \rightarrow c$
$c \rightarrow d \rightarrow b \Rightarrow$	$c \rightarrow b$

توضیح: برای یافتن گراف سبب رتبه یک رابطه با افزودن هر یال، همواره باید احتمال امتداد امتیاز شدن یالها جدیدترین را هم بررسی کرد. و منبع است که یافتن رابطه R^2 از طریق ماتریس بسیار اختصار است تا انجام این عمل توسط رسم گراف رابطه، و نهایتاً با تعیین ماتریس های R^3 و ... R^n می توان ماتریس رابطه R^{∞} بین سبب رتبه R را یافت.

$$152 \quad M_{R^\infty} = M_R \vee M_{R^2} \vee \dots \vee M_{R^n} = \bigvee_{i=1}^{\infty} M_{R^i}$$

در حالت کلی یافتن R^∞ توسط سراسر، برای مجموعه‌های عاود و افعال که بزرگ
 باشد مقدار R^∞ عاود یا افعال آن زیاد باشد (عمل نیست و افعال
 ماتریس که در بالا گفته شد، افعال ساده تر است و برای افعال می توان
 (۴) را به سراسر یک سراسر کامپیوتری نوشت، اما در عین حال اگر
 $|A|=n$ (n مقدار افعال مجموعه A) عدد بزرگ باشد، این روش نیز
 کارایی ندارد و باز هم از روش الگوریتم وارستال برای یافتن R^∞
 کمک می گیریم.

۱- اثر $R \subseteq A \times B$ و $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و
 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس راسته R باشد. مکتبه نزدیکی مرتب R را بنویسید.

۲- اثر $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ و $F = \{\{a, c, e, g\}, \{b, d\}, \{f\}\}$ ماتریس رابطه حاصل از افزاین F روی A را بنویسید.

۳- اثر $A = \{a, b, c, d\}$ و R و S در رابطه روی A ماتریس های زیر باشند

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مطلوبه است

اولاً ماتریس روابط زیر $M_{R \circ S}$, $M_{R \cup S}$, $M_{R - S}$, $M_{R \cap S}$ و $M_{R^{-1}}$

$M_{R \circ S}$, $M_{S \circ R}$, M_{R^2} , M_{S^2} و $M_{R \Delta S}$

تایید اینکه ماتریس روابط R و S به خواص زیرتایی - ضد بازتابی و تقارن و ضد تقارن و نقیض آنها را بررسی کنید.

ثانیاً $M_{R_{nn}}$ و $M_{R_{ny}}$ و M_{R} و $M_{S_{nn}}$ و $M_{S_{ny}}$ و M_{S} (ماتریس مکتبه ستاره ها روابط S, R)

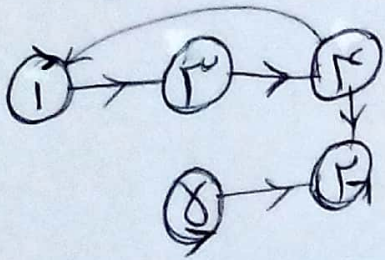
۴- به کمک الگوریتم وارشل ماتریس ستاره شدن رابطه های با ماتریس های M و L در زیر را به دست آورید.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

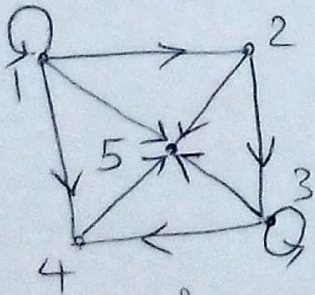
$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۸- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ رابطه $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3)\}$ را رسم کنید.
 تعریف شده است، گراف این رابطه و همچنین گراف R^2 ، R^3 و R^4 و R^∞ را رسم کنید.



۷- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ رابطه R را رسم کنید.
 $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x \neq y\}$

۸- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ رابطه R تعریف شده است که گراف زیر نشان می‌دهد. این رابطه را رسم کنید، با توجه به گراف مربوطه، خواص رابطه را توضیح دهید.
 چنان



۹- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و رابطه $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ را رسم کنید.

۱۰- فرض کنید R و S دو رابطه هم‌ارزی ماتریس‌ها باشند.
 بزرگترین رابطه هم‌ارزی شامل R و S را تعیین کنید (از نظر محتوایی) و همچنین گراف روابط R و S و $R \cup S$ ، $R \cap S$ ، $R \circ S$ و S^2 ، R^2 را رسم کنید.

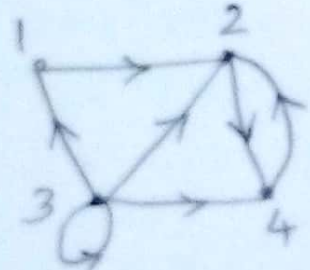
۱۵۶

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

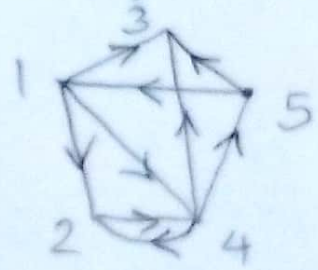
۱۱- گراف بردار R و S در زیر آمده است.

از آن جهت بردار R و S و SoR را بنویسید.

نهایتاً ماتریس بردار SoR و RUS و RAS را بنویسید.



D_R



D_S